

ÖVNING 10

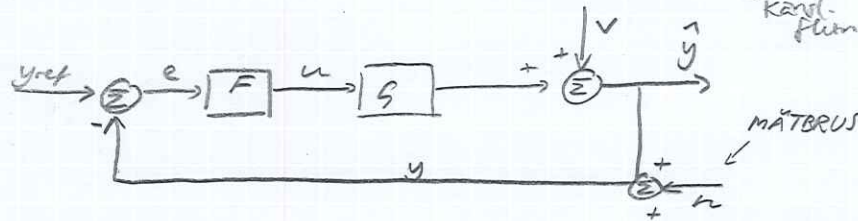
Förragång

> Robusthet

rel. modellfel

$$|\Delta_G(i\omega)| < \frac{1}{|T(i\omega)|} \leftarrow \Delta\omega$$

Kompl. Känsl. flödet



$$\hat{y}(s) = \underbrace{\frac{FG}{1+FG}}_{G_{cl}} y_{ref}(s) + \underbrace{\frac{1}{1+FG}}_{S(s)} V(s) - \underbrace{\frac{FG}{1+FG}}_{T(s)} N(s)$$

• OBS: $S(s) + T(s) = 1$

Kan ej undertrycka störningar och mätbrus samtidigt!

> Tillståndsbekrivning
> Linjärisering.

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

Idag

> Tillståndsväterkoppling:

$$\text{välj } u = -Lx + \tilde{r}$$

$$\Rightarrow \dot{x} = (A - BL)x + B\tilde{r}$$

$$y = Cx$$

Placera egenvärden till $A - BL$
 $\Leftrightarrow$ placera poler.

JÄTTLÄTT
OM SYSTEMET
ÄR PÅ
STYRBAR
KANONISK
FORM!

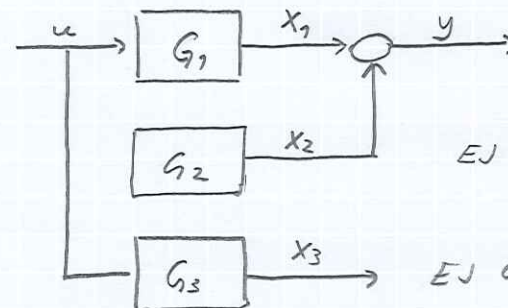
> STYRBART

$$0 \xrightarrow{u} x^* ; \det[B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B] \neq 0 \quad (*)$$

ICKE OBSERVERBART

$$x^* \neq 0 \rightarrow y = 0 ; \det \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = 0 \quad (**)$$

(observerbart om $\neq 0$)



EJ STYRBART

EJ OBSERVERBART

Minimal realisation $\Leftrightarrow$ både styrbart och observerbart.

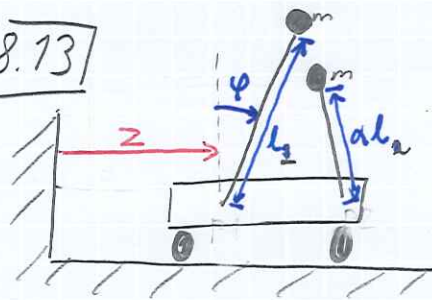
(*) LÄTTARE VILLKOR? (PBH-test)

Styrbart om $[A - \lambda I \ B]$ har full rang
för alla egenvärden λ hos A .

Observerbart om $\begin{bmatrix} A - \lambda I \\ C \end{bmatrix}$ har full rang

för alla egenvärden λ hos A

18.13



- Vagn med pendlar
- Försöker hålla pendlarna uppe genom att föra vagnen fram och tillbaka
- Ingen friktion

likt:

$$\ddot{z} \cos \varphi_i + \ddot{\varphi}_i l_i = g \sin \varphi_i$$

för $i=1,2$

a) Linjärisera systemet runt $\varphi=0$.

• sätt $l_i = m = g = 1$

• skriv på formen $\dot{x} = Ax + Bu$

b) För vilka α är systemet styrbart?
Gissning?

a) STRATEGI: (FÖRRA GÅNGEN)

1) VÄLJ TILLSTÄND

2) SKRIV PÅ OLINJÄR TILLSTÄNDSFORM

3) HITA JÄMVIKTPUNKT

4) TAYLORUTVECKLA/BERÄKNA JACCOBIANER

5) SKRIV PÅ LINJÄR FORM

STRATEGI: IDAG

1) LINJÄRISERA DIFFERV

2) VÄLJ TILLSTÄND

3) SKRIV PÅ TILLSTÄNDSFORM.

Snabbare!!

3

$$1) \ddot{z} \cos \varphi_1 + \ddot{\varphi}_1 l_1 = g \sin \varphi_1 \leftarrow \text{Pendel 1}$$

$$\ddot{z} \cos \varphi_2 + \ddot{\varphi}_2 \alpha l_1 = g \sin \varphi_2 \leftarrow \text{Pendel 2}$$

1:a ordningens approx:

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots$$

$\Rightarrow$ sätt in $l_1 = m = g = 1$:

$$\ddot{z} + \ddot{\varphi}_1 = \varphi_1 \quad (1)$$

$$\ddot{z} + \alpha \ddot{\varphi}_2 = \varphi_2 \quad (2)$$

NI KAN VÄLJA
VAD SOM HELST
JÄ LÄNGE DIFF-
EKV. SÄR ATT
UTTRYCKA I
SÄR TILLSTÄND

2) Välj tillstånd:

$$x_1 = \varphi_1 ; x_2 = \dot{\varphi}_1 ; x_3 = \varphi_2 ; x_4 = \dot{\varphi}_2 ;$$

$$u = \ddot{z}$$

3) Skriv om (1) och (2):

$$\dot{x}_1 = \dot{\varphi}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{\varphi}_1 = \varphi_1 - \ddot{z} = x_1 - u$$

$$\dot{x}_3 = \dot{\varphi}_2 = x_4$$

$$\dot{x}_4 = \ddot{\varphi}_2 = \frac{1}{\alpha}(\varphi_2 - \ddot{z}) = \frac{1}{\alpha}(x_3 - u)$$

På matrisform:

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\alpha} & 0 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -\frac{1}{\alpha} \end{bmatrix}}_B u$$

8.13. 6

Styrbarhetsmatrisen:

$$S = [B \ AB \ A^2B \ A^3B]$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1/\alpha \end{bmatrix} \quad AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/\alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1/\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1/\alpha \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A^2B = A \cdot AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/\alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1/\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1/\alpha^2 \end{bmatrix}$$

$$A^3B = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1/\alpha^2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow S = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1/\alpha & 0 & -1/\alpha^2 \\ -1/\alpha & 0 & -1/\alpha^2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Räkna...}$$

$$\det(S) = \frac{(\alpha-1)^2}{\alpha^4}$$

$$\Rightarrow \det(S) \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 1$$

$\Rightarrow$ Systemet styrbart om och endast om $\alpha \neq 1$.

$\Rightarrow$ Pendlarna behöver ha olika längd för att kunna styras oberoende av varandra!

5

9.1

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

OBS!
Styrbar kanonisk form! s. 158

a) Beräkna tillståndsväterkoppling så polerna hamnar i

$$i) -3, -5$$

$$ii) -10, -15$$

Kom ihåg:
poler = A's egenvärden!

b) Antag att enbart utsignalen kan mätas. Beräkna observatör så att vi får samma ÖF från $y_4 \rightarrow y$ som i a).

a) Återkoppling:

$$u(t) = \underset{1 \times 1}{-L} \underset{1 \times 2}{x(t)} + \underset{2 \times 1}{\tilde{r}(t)} \underset{1 \times 1}{1}$$

• Slutna systemet blir:

$$\dot{x} = (A - BL)x + B\tilde{r}$$

$$y = Cx$$

• Polerna ges av EV till $A - BL$

$$BL = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [l_1 \ l_2] = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

STRATEGI a)

1) Beräkna $A - BL$

2) Beräkna polerna
poler $\leftarrow L$

3) Välj L för att placera poler

9.1. a) form)

$$\text{Så } [A - BL = \begin{bmatrix} -2 - \lambda_1 & -1 - \lambda_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}]$$

2) • Karakteristisk ekv:

$$\det(A - BL - \lambda I) = -\lambda(-2 - \lambda_1 - \lambda) + 1 + \lambda_2 = \lambda^2 + (2 + \lambda_1)\lambda + 1 + \lambda_2$$

• Poler: p_1, p_2 mnebar:

$$(\lambda - p_1)(\lambda - p_2) = \lambda^2 - (p_1 + p_2)\lambda + p_1 p_2 = 0$$

• identifiera:

$$2 + \lambda_1 = -p_1 - p_2 \Rightarrow \lambda_1 = -p_1 - p_2 - 2$$

$$1 + \lambda_2 = p_1 p_2 \Rightarrow \lambda_2 = p_1 p_2 - 1$$

3) • i) $\lambda_1 = 3 + 5 - 2 = 6$ } $L_{ij} = [6 \ 14]$
 $p_1 = -3, \lambda_2 = 3 \cdot 5 - 1 = 14$
 $p_2 = -5,$

• ii) $\lambda_1 = 10 + 15 - 2 = 23$ } $L_{ij} = [23 \ 149]$
 $p_1 = -10, \lambda_2 = 10 \cdot 15 - 1 = 149$
 $p_2 = -15$

OBS) Insignalen blir jättestor om vi väljer poler långt från origo.

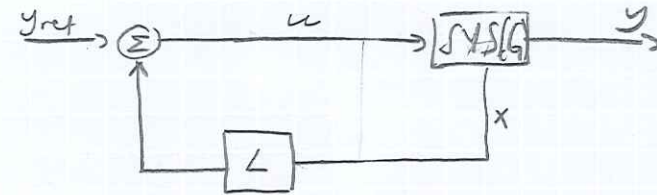
(hade vi kunnat välja komplexa poler? JA!)
 kräv: komplexkonjugerade)

7

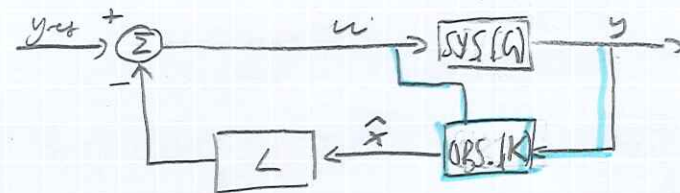
9.1 b) OBSERVATÖR

8

Vanlig tillståndsväterkoppling:



Om vi inte har tillgång till x får vi försöka rekonstruera tillståndet från y .



Boh J. 191-193

Teori:

• K återkopplar från skattningsfelet $y - C\hat{x}$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu + K(y - C\hat{x}) = \\ &= (A - KC)\hat{x} + Bu + Ky \end{aligned}$$

• $\tilde{x} := x - \hat{x}$ ska gå snabbt mot noll

$$\tilde{x}(t) = e^{(A - KC)t} \tilde{x}(0)$$

$\Rightarrow$ går snabbare om egenvärden till $A - KC$ ligger långt ut i VHP.

> Placera poler/ev. till $A - KC$ på gynnsamt sätt!

> Möjligt om systemet är observerbart

{ enkelt om sys. på obs. bar }
 { kanonisk form }

9.1.5) fort

HÄR:

> Observerbarhet?

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}; \det O = -1 \neq 0$$

JA ☺

> Välj poler längre ut i VHP än systemets poler
t.ex. -20 ← dubbelpol!

$$A - KC = \begin{bmatrix} -2 - k_1 & -1 \\ 1 - k_2 & 0 \end{bmatrix}$$

↑ NACKDEL OM
FÖR LÅNGT UT
KÄNLIKHET FÖR
BRUS.

$$\det(A - KC - \lambda I) = -\lambda(-2 - k_1 - \lambda) + (1 - k_2) =$$

$$= \lambda^2 + (2 + k_1)\lambda + 1 - k_2$$

$$(\lambda + 20)^2 = \lambda^2 + 40\lambda + 400 \leftarrow \text{önskad kar. chr.}$$

Identifiera:

$$\begin{aligned} 2 + k_1 &= 40 & \Rightarrow k_1 &= 38 \\ 1 - k_2 &= 400 & \Rightarrow k_2 &= -399 \end{aligned}$$

$$K = \begin{bmatrix} 38 \\ -399 \end{bmatrix}$$

9

18.10 UPPG. 1

10

> BERÄKNA STYRBARA RESP. ICKE-OBJERN-
ERBARA UNDERUM, SAMT DERAS DIMENSIONER

• Styrbara tillstånd ges av $\text{span}\{S\}$ där

$$S = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

• Icke observerbara tillstånd ges av $\ker(O)$
Nollrum

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

a) $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $C = [1 \ 3 \ 1.5]$

$$S = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -1 & 3 & -9 \\ 2 & -6 & 18 \end{bmatrix}$$

lin. beroende!

rank $S = 2$

$$\mathcal{R}_S = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix} \right\}$$

$$O = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1.5 \\ -2 & -3 & -1.5 \\ 4 & 3 & 1.5 \end{bmatrix}$$

lin. beroende!
2x!

Rank $O = 2 \Rightarrow \dim \ker(O) = 1$

Beräkna $\ker(O)$:

$$Ox = 0$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1.5 & 0 \\ 0 & 3 & 1.5 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \quad 3x_2 + 1.5x_3 = 0$$

$$\ker O = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

Bonus: PBH-test

8.10 a) Observerbarhet

observerbart om $\begin{bmatrix} A - \lambda I \\ C \end{bmatrix}$ har full rang
för alla ev. λ

$\Leftrightarrow$ ej observerbart om $\begin{bmatrix} A - \lambda I \\ C \end{bmatrix}$ tappat rang.

$\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -3$ (Triangulär matris!)

$$\begin{bmatrix} A - (-2)I \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1,5 \end{bmatrix} \text{ full rang!}$$

$$\begin{bmatrix} A - (-1)I \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 1,5 \end{bmatrix} \text{ full rang!}$$

$$\begin{bmatrix} A - (-3)I \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1,5 \end{bmatrix} \text{ EJ FULL RANG!}$$

$\leftarrow$
 $\leftarrow = [1] + 2 \times [2]$

Det icke observerbara rummet spänns upp av
eigenvektorn till -3 .

$$(A + 3I)v = 0$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$v_1 = 0$$

$$2v_2 + v_3 = 0$$

$$v_3 = -2v_2$$

$$v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot t, t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \underline{R_{0,0} = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}}$$