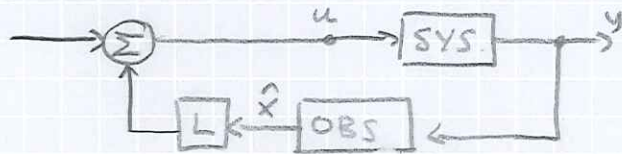


ÖVNING 12

JENAST + IDAG • Tillstånd återkoppling
• Observatorer

OBSERVATOR



> Skattningsfel $\tilde{x} = x - \hat{x} \rightarrow 0$

dynamik: $\dot{\tilde{x}} = (A - KC)\tilde{x}$

> Placera poler till $(A - KC)$ godtyckligt
gör $\tilde{x}$ -dyn. snabbare än x -dyn!
genom att placera längre ut i VHP.

> Visas på s. 200 att ÖF sammanfaller
med utan observatör.

Notera: förutsättning: sys. observerbart!

IDAG ÄVEN: framkoppling

9.4 GIVET:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} x$$

UPPGIFT: vill
• placera poler i $\{-2, -3\}$
• föreslå observatör
• använd linjär tillstånd återkoppling.

STRATEGI: 1) Beräkna kar. eqv. för $(A - BL)$ med $L = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \end{pmatrix}$.

2) Kar. eqv. om poler i $-2, -3$, identifiera l_1, l_2 .

3) Designa observatör

1) (kontrollera först STYRBARHET)

$$A - BL = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -l_1 & -l_2 \\ -l_1 & -1-l_2 \end{pmatrix}$$

• Karakteristisk ekvation ($\det(A - BL - \lambda I) = 0$)

$$\det \begin{pmatrix} -l_1 - \lambda & -l_2 \\ -l_1 & -1-l_2-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda + l_1)(1 + l_2 + \lambda) - l_1 l_2 =$$

$$= \lambda^2 + \lambda(1 + l_2) + \lambda l_1 + l_1(1 + l_2) - l_1 l_2 =$$

$$= \lambda^2 + \lambda(1 + l_1 + l_2) + l_1 + l_1 l_2 - l_1 l_2 = 0$$

9.4 contd.

- 2) Karakteristiska ekvationen om poler är i $-2, -3$:

$$(\lambda + 2)(\lambda + 3) = \lambda^2 + 3\lambda + 2\lambda + 6 = \lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$$

Identifiera: $\left. \begin{array}{l} 1 + k_1 + k_2 = 5 \\ k_1 = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow k_1 = 6, k_2 = -2$

$\Rightarrow$ TILLSTÄNDSÅTERKOPPLINGEN BLIR:

$$u = \underbrace{[6 \quad -2]}_L x + \tilde{r}$$

- 3) (kontrollera OBSERVERBARHET)

• Tillståndsekvation:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y - C\hat{x})$$

$$= (A - KC)\hat{x} + Bu + Ky$$

- Välj K för att placera poler hos $A - KC$.

$$A - KC = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -k_1 & k_1 \\ -k_2 & -1 + k_2 \end{pmatrix}$$

• Kar. eqv. $(\det(A - KC - \lambda I) = 0)$:

$$\det \begin{pmatrix} -k_1 - \lambda & k_1 \\ -k_2 & -1 + k_2 - \lambda \end{pmatrix} = (k_1 + \lambda)(1 - k_2 + \lambda) + k_1 k_2 =$$

$$= \lambda^2 + \lambda(1 - k_2) + k_1 \lambda + k_1(1 - k_2) + k_1 k_2 =$$

$$= \lambda^2 + \lambda(1 + k_1 - k_2) + k_1 - k_1 k_2 + k_1 k_2 = 0$$

• Placera poler längre ut i VHP än -3 , t. ex i -4 : (dubbelpol):

$$\Rightarrow (\lambda + 4)^2 = \lambda^2 + 8\lambda + 16 = 0$$

Identifiera: $\left. \begin{array}{l} 1 + k_1 - k_2 = 8 \\ k_1 = 16 \end{array} \right\} \Rightarrow k_1 = 16, k_2 = 9$

Vi får

$$K = \begin{bmatrix} 16 \\ 9 \end{bmatrix}$$

9.8

- Tanksystem
- u, h, q, v sättes från avvikelse från jämviktsläge (systemet jämnar ut!)

> flödet q ges av:

$$Q(s) = \frac{k_1}{1+Ts} U(s) = \frac{1}{1+0,5s} U(s) \quad (1)$$

> tanknivån h ges av:

$$A\dot{h} = q - v \quad (2)$$

där $A = 1 \text{ m}^2$

a) Bestäm tillståndsmodell med q och h som tillstånd.

Beräkna tillståndsvärdet $u = -k_1 q - k_2 h + r$ så att båda poler hamnar i -2 .

b) Statiskt fel om $v = 0,1$ och $r = 0$?

c) Beräkna framkoppling från v till r för att eliminera v 's påverkan. Ta bort alla deriverande termer. Vad är statiskt fel nu?

d) Använd styrslag (c) men anta $k_1 \neq 1$. (Statiskt fel?)

e) Föreslå förbättrad styrslag utifrån d)

a) Tillstånd: $x = \begin{bmatrix} q \\ h \end{bmatrix}$

Externa signaler: u, v

(1) ger: $(1+Ts)Q(s) = k_1 U(s)$

$$\mathcal{L}^{-1}: q + T\dot{q} = k_1 u \Rightarrow \dot{q} = -\frac{1}{T}q + \frac{k_1}{T}u \quad (3)$$

(2) ger: $\dot{h} = \frac{1}{A}q - \frac{1}{A}v \quad (4)$

(3), (4) $\Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/T & 0 \\ 1/A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1/T \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ -1/A \end{bmatrix} v \quad (5)$$

med $T=0,5, k_1=1, A=1$:

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} v \quad (6)$$

$$\dot{x} = A x + B u + E v$$

Tillståndsvärdkoppling:

$$u = -k_1 q - k_2 h + r = -\underbrace{[k_1 \ k_2]}_L \begin{bmatrix} q \\ h \end{bmatrix} + r \quad (7)$$

ger $\dot{x} = (A - BL)x + Br + Ev,$

dvs.

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2-2k_1 & -2k_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} v \quad (8)$$

9.8. a) forts!

* Kar. elv. blir: $(\det(A-BL-\lambda I)=0)$:

$$\lambda^2 + (2+2L_1)\lambda + 2L_2 = 0$$

* Poler i -2 ges:

$$(\lambda+2)^2 = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$$

* Identifiera:

$$2+2L_1 = 4 \Leftrightarrow L_1 = 1$$

$$2L_2 = 4 \Leftrightarrow L_2 = 2$$

Svar: $L = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$

b) Stationaritets $\Leftrightarrow \dot{x} = 0 \Leftrightarrow \dot{q} = \dot{h} = 0$

Beräkna värden på q, h utifrån (8), $r=0, v=0,1$:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ h \end{bmatrix} + 0 + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} 0,1$$

$$\Leftrightarrow -4q - 4h = 0 \Leftrightarrow q = -h$$

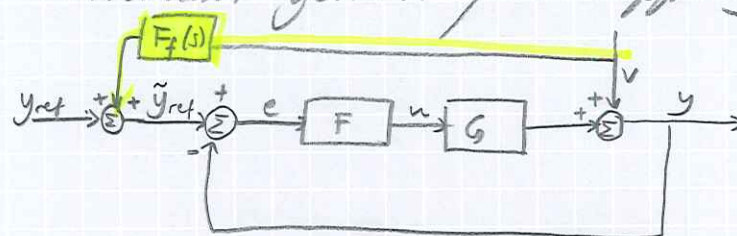
$$q - 0,1 = 0 \Leftrightarrow q = 0,1 \Rightarrow h = -0,1$$

$\Rightarrow$ Stationära fl. blir -0,1

$$e = r - y = 0 - 0,1 = -0,1$$

c) Framkoppling

* Om störning kan mätas: eliminera inverkan genom framkoppling



> låt referenssignalen $\tilde{y}_{ref}$ innehålla info om störning redan från början!

* Slutna systemet blir:

$$Y = G_c \tilde{Y}_{ref} + S V = G_c (Y_{ref} + F_f V) + S V = G_c Y_{ref} + (G_c F_f + S) V$$

KOM IHÄG:
S: KÄNQLIGHETS-
FUNKTION

* Störningen v påverkar ej y om

$$G_c F_f + S = 0 \Leftrightarrow F_f = -G_c^{-1} S \quad (*)$$

* Problem: F_f blir ofta ej proper, går ej att realisera. Approximera för att komma nära (*). (Påverkan kan dock ej helt elimineras i så fall).

28/c) Vi har $Y(s) = G_c(s)R(s) + G_v(s)V(s)$

Med framkoppling:

$$Y = G_c(R + F_f V) + G_v V = G_c R + (G_c F_f + G_v) V$$

Sätt $F_f = -G_v/G_c$ för att ta bort störning.

* Beräkna $G_c(s)$.

(8) $\Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{h} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -4 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A_L} \begin{bmatrix} q \\ h \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B_r} r + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}}_{B_v} v$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_C \begin{bmatrix} q \\ h \end{bmatrix}$$

$$G_c(s) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Boks 162}}}{C} (sI - A_L)^{-1} B = \frac{1}{s^2 + 4s + 4} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -4 \\ -1 & s+4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{2}{s^2 + 4s + 4}$$

$$G_v(s) = C(sI - A_L)^{-1} B_v = \frac{1}{s^2 + 4s + 4} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -4 \\ -1 & s+4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{s+4}{s^2 + 4s + 4}$$

* Framkopplingen blir

$$F_f = -\frac{G_v}{G_c} = \frac{s+4}{2} = \frac{s}{2} + 2$$

MEN: vi vill inte derivera framkopplingen (se uppgift) ⑨

Så därför: $F_f = 2$ $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_L x + B \left(r + \frac{2v}{F_f} \right) + B_v v \\ y &= Cx \end{aligned}$$

Stationära felet blir nu: $\lim_{t \rightarrow \infty} r=0, v \neq 0$ som i b):

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot 2v + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} v$$

$$\Leftrightarrow -4q - 4h + 4v = 0 \quad (1)$$

$$q - v = 0 \quad (2)$$

$$(2) \Rightarrow q = v \quad \text{i (1):}$$

$$-4v - 4h + 4v = 0 \Rightarrow h = 0$$

Så stationära felet

$$e = r - h = 0 - 0 = 0$$

d) Om $k_1 \neq 1$ fäs istället: (sätt in $B_c = \begin{bmatrix} k_1/r \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ i $(A-B_c k_c)$)

$$A_c = \begin{bmatrix} -2(1+k_1) & -4k_1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B_c = \begin{bmatrix} 2k_1 \\ 0 \end{bmatrix}, B_v = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Stationära felet ges nu av:

$$\begin{bmatrix} -2(1+k_1) & -4k_1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k_1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot 2v + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-2(1+k_1)q - 4k_1 h + 4k_1 v = 0 \quad (3)$$

$$q - v = 0 \quad (4)$$

(4) $q = v$ i (3):

$$-2(1+k_1)v + 4k_1 v = 4k_1 h$$

$$h = \frac{4k_1 - 2 - 2k_1}{4k_1} v = \frac{2k_1 - 2}{4k_1} v = \frac{k_1 - 1}{2k_1} v$$

$$\Rightarrow e = r - h = 0 - \frac{k_1 - 1}{2k_1} v = \frac{1 - k_1}{2k_1} v$$

e) För att eliminera stationärt fel: integrator.

Introducera $z(t) = \int_0^t h(\tau) d\tau \Rightarrow \dot{z} = h$

Nu fäs systemet (sfr a):

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{h} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ h \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} v$$

Med tillstånd återkoppling $u = -Lx$:

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{h} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2-2k_1 l_1 & -2k_1 l_2 & -2k_1 l_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ h \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} v$$

Vid stationaritiet: $\dot{q} = \dot{h} = \dot{z} = 0$ fäs den 3:e ekvationen som

$$0 = h, \text{ dvs. } e = r - h = 0 \text{ oavsett!}$$