

ÖVNING 3 2016

Senast:

- PID-regulatorn
- överföringsfunktioner

Idag

- Rel. dämpning
- Rotort

13.21 Uppgift: Betrakta systemet från uppg. 3.1 (övn. 2), d.v.s.:

$$H(s) = \underbrace{\frac{2F(s)}{s(1+5s)+2F(s)}}_{G_{cl}(s)} H_{ref} - \underbrace{\frac{1+5s}{s(1+5s)+2F(s)}}_{G_{dist}(s)} V(s)$$

a) Beräkna poler för det slutna systemet om $F(s) = K = 1$

HOPPA ÖVER!

b) För PD-regulatorn,

$$u = -K_p h - K_D \frac{dh}{dt}$$

$$\mathcal{L}: U = -K_p H - K_D s H = (-K_p - K_D s) H$$

anta $K_p = 1$, välj K_D så att relativa dämpningen hos polerna

$$\xi > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

TEORI: RELATIV DÄMPNING

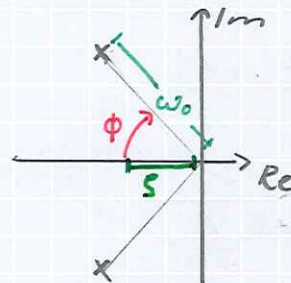
BOK s. 37!

Betrakta

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + as + b} := \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2} \quad (*)$$

Polerna blir (när nämnare = 0)

$$s_{1,2} = \omega_0 (-\xi \pm i\sqrt{1-\xi^2})$$



$\xi = \cos\phi$: relativ dämpning

AVGÖR HUR DÄMPAT STEG SVARET BLIR

Litet ξ (stor ϕ):
mycket svängningar

Kom ihåg: ω_0 avgör snabbhet på steg svar.

SE FIG. 2.7, BOK s. 38 (OH!)

a) Lös 2:a gradsekvation

$$s(1+5s) + 2K = 0$$

Om $K=1$: svar:

$$s_{1,2} = -\frac{1}{10} \pm i \frac{\sqrt{39}}{10}$$

Notera! ändrar vi K flyttas polerna!

b) Regulator: $F(s) = K_p + K_D s$

$$\Rightarrow G_{\text{ek}} = \frac{0,4(sK_D + K_p)}{s^2 + (0,2 + 0,4K_D)s + 0,4K_p} \quad \swarrow \text{2:a ordningen}$$

Identifiera nämnare med (*)

$$\begin{array}{ccc} s^2 & + (0,2 + 0,4K_D)s & + 0,4K_p \\ \uparrow & \underbrace{\hspace{1cm}}_{2\zeta\omega_0} & \underbrace{\hspace{1cm}}_{\omega_0^2} \\ s^2 & & \end{array}$$

$$G_{\text{net}}: K_p = 1 \Rightarrow \omega_0^2 = 0,4 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{0,4}$$

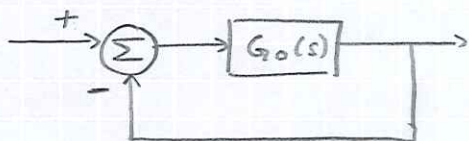
$$0,2 + 0,4K_D = 2\zeta\omega_0 = 2\zeta\sqrt{0,4}$$

$$\Rightarrow K_D = \frac{2\zeta\sqrt{0,4} - 0,2}{0,4}$$

Vi kräver $\zeta > \frac{1}{\sqrt{2}}$, d.v.s.

$$K_D > \frac{2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{0,4} - 0,2}{0,4} \approx 1,7$$

13.5) a) MÅL: Rita ROTORT
 Hur beror polerna av parameter.



Uppgift: Rita rotort m.a.p. K för systemet ovan, med

$$G_0(s) = \frac{K(s+2)}{s(s+1)(s+3)}$$

För vilka K är systemet stabilt?

SE BOK s. 65-68!

Lösning:

- STRATEGI:
- 1) Hitta $G_{CL}(s)$
 - 2) TA FRAM START- & SLUTPUNKTER, ASYMPTOTER M.M.
 - 3) RITA ROTORT
 - 4) TOLKA ROTORT

1) Det slutna systemet:

$$\begin{aligned} G_{CL} &= \frac{G_0}{1 + G_0} = \frac{K(s+2)}{s(s+1)(s+3) \left(1 + \frac{K(s+2)}{s(s+1)(s+3)} \right)} \\ &= \frac{K(s+2)}{s(s+1)(s+3) + K(s+2)} = \frac{Q(s)}{P(s) + KQ(s)} \end{aligned}$$

2) Poler ges av rötter till G_{CL} , dvs.

$$P(s) + KQ(s) = 0$$

med

$$P(s) = s(s+1)(s+3)$$

$$Q(s) = s+2$$

$$n=3$$

$$m=1$$

$$(n \geq m)$$

* STARTPUNKTER : $K=0$ (se OH!)

$$P(s)=0 \Rightarrow \begin{matrix} s=0 \\ s=-1 \\ s=-3 \end{matrix}$$

* ÄNDPUNKTER : $K=\infty$ (se OH!)

$$Q(s)=0 \Rightarrow s=-2$$

⇒ * PUNKTER PÅ RE-AXELN SOM TILLHÖR ROTORTEN (se OH!)

* ANTAL ASYMPTOTER: $n-m=2$

se s. 67!

* SKÄRNINGSPUNKT: UTGÅNGSPUNKT FÖR

"STRÅLARNA" SOM UTGÖR ASYMPTOTER:

$$\begin{aligned} SP &= \frac{1}{n-m} (\sum \text{startpunkter} - \sum \text{ändpunkter}) = \\ &= \frac{1}{3-1} (0-1-3 - (-2)) = \frac{1}{2} \cdot (-2) = -1 \end{aligned}$$

3.5-form 1

* RIKTNING FÖR ASYMPTOTER

från att

$$\arg\left(\frac{P(s)}{Q(s)}\right) = \arg(-K) = \pi + 2\pi k$$

för att (för stora s)

$$\varphi = \frac{\pi}{n-m} + 2k \cdot \frac{\pi}{n-m} \quad k=0, 1, \dots, n-m-1 \quad \text{SE BOKEN!}$$

här: $\varphi = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, \quad k=0, 1, \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\pi}{2}$
 $\varphi_2 = \frac{3\pi}{2}$

$\Rightarrow$ ASYMPTOTERNA STARTAR I
 SKÄRNINGSPUNKTEN SP OCH
 GÅR UT I RIKTNINGARNA
 $\varphi_1 = \pi/2, \quad \varphi_2 = 3\pi/2$

* SKÄRNING MED IMAG. AXELN

vätt $s=i\omega$ i $P(s)+KQ(s)=0$,

lös m.a.p. ω, K .

här:

$$i\omega(i\omega+1)(i\omega+3) + K(i\omega+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (-4\omega^2 + 2K) + i(-\omega^3 + (3+K)\omega) = 0 + 0i$$

• Real del = 0: $-4\omega^2 + 2K = 0$

$$\omega = \pm \sqrt{K/2}$$

OCH

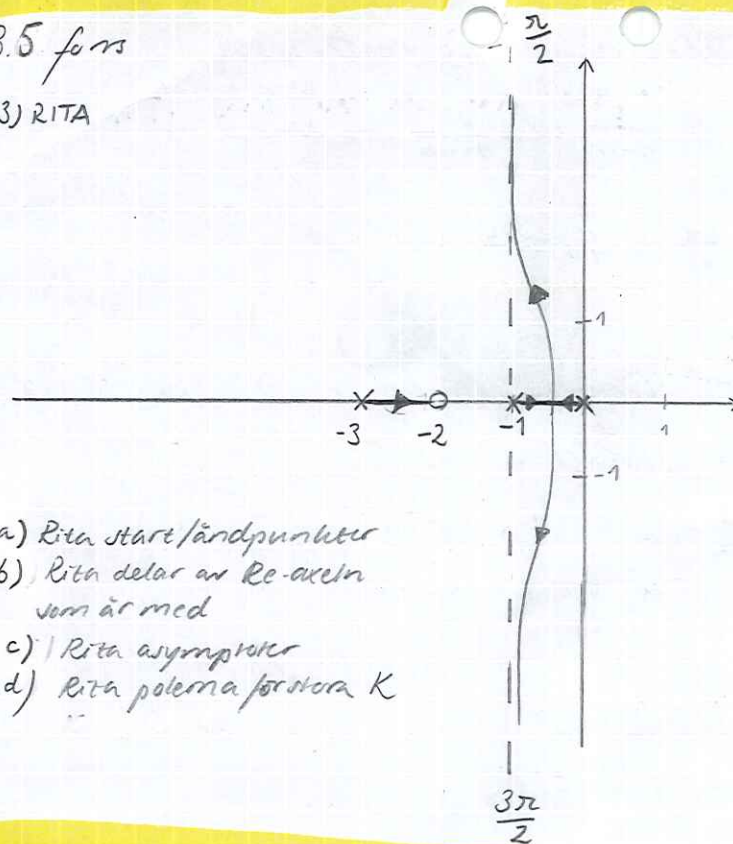
• Imaginär del = 0: $\omega = 0, \omega = \pm \sqrt{3+K}$

$\Rightarrow$ ENDA LÖSNING: $K=0, \omega=0$

① Intressant, asymptoterna och startpunkterna
 är alla i VHP, utom startpunkt i 0.

3.5 forts

3) RITA



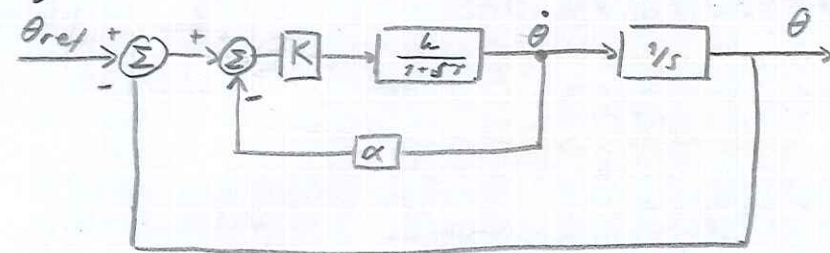
- Rita start/ändpunkter
- Rita delar av Re-axeln som är med
- Rita asymptoter
- Rita polerna för stora K

4) OBSERVATIONER

- POLER ALLTID STRIKT I VHP FÖR $K > 0$
- REELLA POLER FÖR SMÅ K (INGA SVÄNGNINGAR)
- AVSTÅNDET TILL ORIGO FÖR DEN NÄRMASTE POLEN ÖKAR MED K (INABBARE!)
- SVÄNGIGT SYSTEM FÖR STORT K .

3.6 Uppgift

System: DC-motor med servosystem



$$\tau = 0,5$$

$$k = 2$$

- Rita rotorell för $\alpha = 0$, m.a.p K
- Rita rotorell för $K = 1$, m.a.p α

Lösning:

0) TA FRAM G_{CL} FÖR ALLA α, K . ($\theta_{ref} \xrightarrow{TF} \theta$)

$$\theta(s) = \frac{1}{s} \dot{\theta}(s) \Rightarrow s\theta(s) = \dot{\theta}(s) \quad (1)$$

$$\dot{\theta}(s) = K \cdot \frac{k}{1+st} (\theta_{ref}(s) - \theta(s) - \alpha \dot{\theta}(s)) \quad (2)$$

(1) : (2):

$$s\theta(s) = \frac{2K}{1+0,5s} (\theta_{ref}(s) - \theta(s) (1+\alpha s))$$

$$\theta(s) / s + \frac{2K}{1+0,5s} \cdot (1+\alpha s) = \frac{2K}{1+0,5s} \theta_{ref}$$

$$\Rightarrow \theta(s) = \underbrace{\frac{2K}{s(1+0,5s) + 2K(1+\alpha s)}}_{G_{CL}(s)} \theta_{ref}$$

a) $K \in [0, \infty[$, $\alpha = 0$

FÖLJ JETEN PÅ OCH!

1) $G_{OL} = \frac{2K}{s + 0,5s^2 + 2K}$

2) Polpolynom: $\underbrace{s + 0,5s^2}_{P(s)} + \underbrace{K \cdot 2}_{Q(s)} = 0$

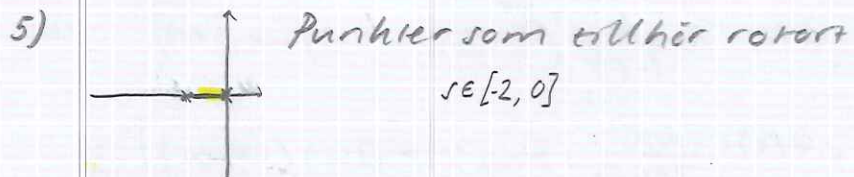
$P(s) = 0,5s^2 + s \Rightarrow n=2$
 $Q(s) = 2 \Rightarrow m=0$, $n \geq m$ ☺

3) Startpunkter:

$P(s) = 0 \Rightarrow s(1 + 0,5s) = 0 \Rightarrow s=0, s=-2$

4) Slutpunkter

$Q(s) = 0$, inga lösningar $\Rightarrow$ inga ändpunkter



6) Antal asymptoter: $n-m=2$

7) Skärningspunkt:

$SP = \frac{1}{n-m} (\sum \text{Startp.} - \sum \text{ändp.}) = \frac{1}{2} (0 + (-2)) = -1$

8) Riktningar på asymptot

$\phi = \frac{\pi}{n-m} + 2l \frac{\pi}{n-m}$, $l=0,1$

$\phi_0 = \frac{\pi}{2}$, $\phi_1 = \frac{3\pi}{2}$

9) Skärningspunkter med Im-axeln :

$P(i\omega) + KQ(i\omega) = 0$

$\Rightarrow 0,5(i\omega)^2 + i\omega + 2K = 0$

$(-0,5\omega^2 + 2K) + i\omega = 0$

Re-del = 0

OCH

Im-del = 0

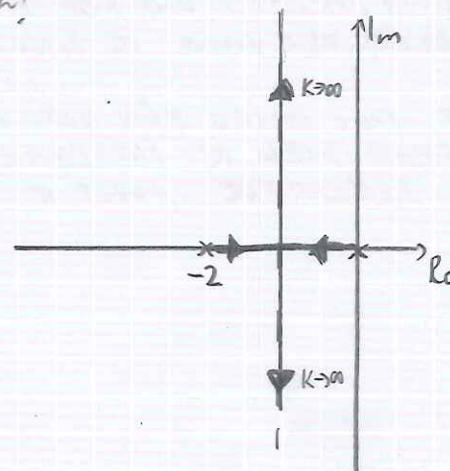
$-0,5\omega^2 + 2K = 0$

$\omega = 0$

$\omega = \pm \sqrt{4K} = \pm 2\sqrt{K}$

$\omega = 0$ är enda lösning, svarar mot $K=0$ (OK!)

10) Rita!



3.6

$$d) /K=1, \alpha \in [0, \infty[$$

$$1) G_{CL} = \frac{2}{s(1+0,5s)+2\alpha s+2}$$

2) Polpolynom:

$$\underbrace{0,5s^2+s+2}_{P(s)} + \underbrace{\alpha \cdot 2s}_{\text{"K" } Q(s)} = 0$$

$$\begin{aligned} P(s) &= 0,5s^2+s+2 \Rightarrow n=2 \\ Q(s) &= 2s \Rightarrow m=1 \end{aligned}$$

 $n > m$ ☺

3) Startpunkter:

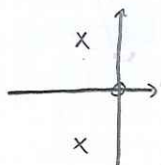
$$P(s)=0 \Rightarrow s^2+2s+4=0$$

$$s = -1 \pm \sqrt{1-4} = \underline{-1 \pm i\sqrt{3}}$$

4) Ändpunkter

$$Q(s)=0 \Rightarrow 2s=0 \Rightarrow \underline{s=0}$$

5) Punkter som tillhör rotort på Re-axeln



• ALLA punkter på neg. Re-axeln

/ nu är rotorten
m.g.p. α inte k6) Antal asymptoter $n-m=1$

$$7) \text{ "Skärningspunkt": } SP = \frac{1}{2-1} \cdot (-1+\sqrt{3}i + (-1)-\sqrt{3}i - 0) = \underline{-2}$$

8) Asymptotens riktningar

$$\phi = \frac{\pi}{1} = \pi \quad \text{d.v.s. PÅ REELLA AXELN}$$

(d.v.s. asymptoten "skär" inte reella axeln)

9) Skärningspunkt med Im-axeln:

$$P(i\omega) + \alpha Q(i\omega) = 0$$

$$\Rightarrow 0,5(i\omega)^2 + i\omega + 2 + \alpha \cdot 2i\omega = 0$$

$$-0,5\omega^2 + 2 + i(\omega + \alpha \cdot 2\omega) = 0$$

$$\text{Re-del} = 0 \quad \text{OCH} \quad \text{Im-del} = 0$$

$$-0,5\omega^2 + 2 = 0$$

$$\omega = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

$$\omega + \alpha \cdot 2\omega = 0$$

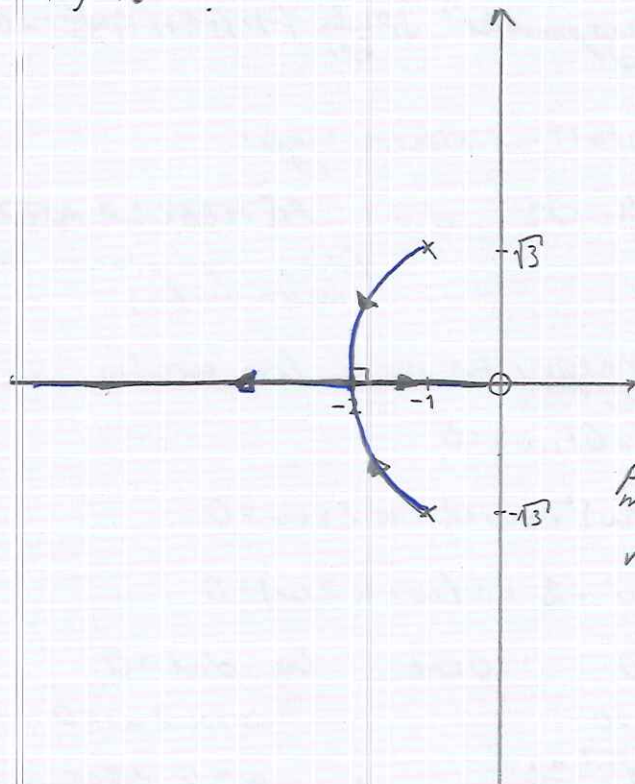
$$\omega = 0 \text{ eller } \alpha = -0,5$$

Ingen lösning!

 $\Rightarrow$ Ingen skärning med Im-axeln

3.6 d)

10) Rita!



polerna går
mot reella axeln
och inkommer
vinhelrätt!