

ÖVNING 5 2016

Förra gången:

* Potort

* Rel. dämpning

Idag:

* Nyquistkriteriet

NYQUISTKRITERIET: Är det slutna systemet stabilt?
(HUVUDFRÅGAN!)

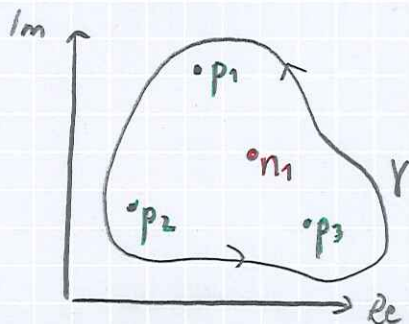
TEORI

- 1) ARGUMENTVARIATIONSPRINCIPEN
- 2) STABILITETS FRÅGAN
- 3) NYQUISTKRITERIET

1) ARGUMENTVARIATIONSPRINCIPEN (CAUCHY)

Bok s. 234-235

Anta att funktionen $f(z)$ är analytisk i område $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, utom i P st. poler.
Låt $f(z)$ ha N st. nollställen



γ : kurva som omsluter alla poler och N st. engång

Då gäller:

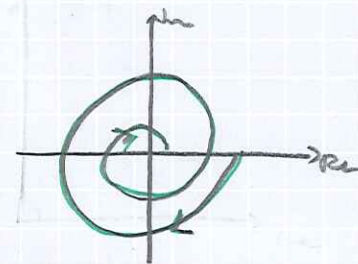
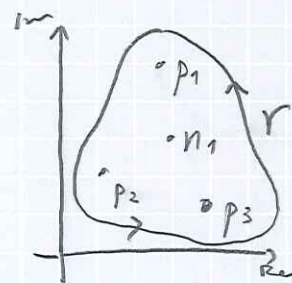
$$N - P = \frac{1}{2\pi} \text{vararg}_\gamma f(z)$$

> Argumentvariationen:

> ARGUMENT: Vinkel hos punkti komplexa planet

> ARGUMENT VARIATION: "Totala" vinkeln på en kurva

VILKEN KURVA? JO, DEN SOM FÅS DÅ γ MAPPAS / AVBILDAS GENOM $f(z)$



[o.v.s. $\frac{1}{2\pi} \text{vararg}_\gamma f(z)$: antal varv som mappning av γ går runt origo moturs.]

här: $N - P = 1 - 3 = -2$

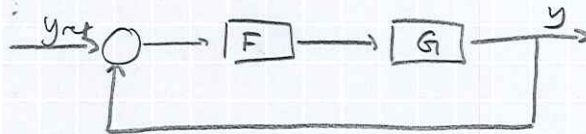
$\text{vararg}_\gamma f(z) = -2 \cdot 2\pi = -4\pi$
2 VARV MEDURS!

2) STABILITETSFRÅGAN

FRÅGA: ÄR SLUTNA SYSTEMET STABILT?
D.V.S. FINNS POLER I HHP?

HUR VI GÖR: ANALYSERA ÖPPNA SYSTEMET

VARFÖR:



$$G_0(s) = G(s)F(s)$$

$$G_{CL}(s) = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)}$$

> POLER TILL $G_{CL}(s)$, P_{CL} : NOLLSTÄLLEN
TILL $1 + G_0(s)$.

FRÅGAN BLIR: HAR $1 + G_0(s)$ NOLLSTÄLLEN
I HHP?

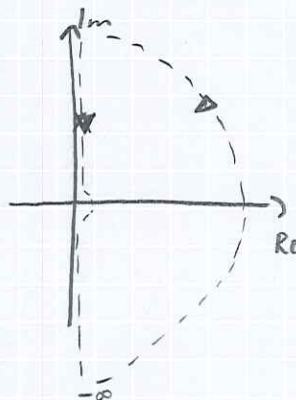
① POLER TILL $1 + G_0(s)$ =
POLER TILL $G_0 = P_0$

ANVÄND ARG. VAR. PRINCIPEN MED:

γ : kurva som omsluter
hela HHP
(utom ev. poler på Im-axeln)

$$f(z) \leftrightarrow 1 + G_0(s)$$

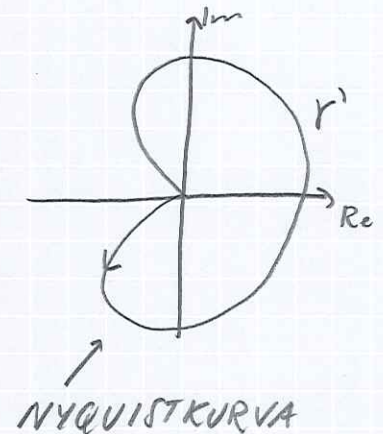
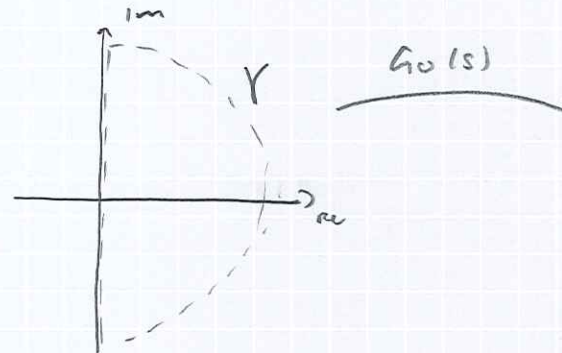
↑
Skiftad kurva!
Titta på varv kring
-1 istället för origo!



3) NYQUISTKRITERIET:

$$N - P = \frac{1}{2\pi} \text{ varangr } G_0(s)$$

$$\hookrightarrow P_{CL} = P_0 + \# \text{ VARV KURVAN GÖR KRING -1} \\ (\text{MED TECKEN})$$



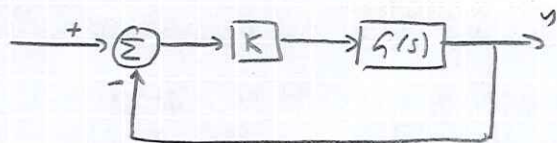
> NOTERA: OM G_0 EJ HAR POLER I HHP
(D.V.S. $P_0 = 0$) SÅ ÄR STABILITETSVILL-
KORÄT ATT KURVAN γ' EJ FÅR OMSLUTA -1

(Resultat 3.3. Bok s. 76)

3.14 MÅL: Använda Nyquistkriteriet

UPPGIFT:

Systemen $G_i(s), \dots, G_{iv}(s)$ regleras med en P-regulator $F(s) = K$:



- Är det slutna systemet stabilt för $K=1$ (se Nyquist-diagram!)
- För vilka $K > 0$ är det slutna systemet stabilt?

LÖSNING:

- VI VET:
- $G_0(s) = G(s) \cdot K = \{K=1\} = G(s)$ (4 olika)
 - $G_0(s)$: NYQUISTDIAGRAM (i) (iv)
 - $G_0(s)$: INGA POLER I HHP $\Rightarrow P_0 = 0$

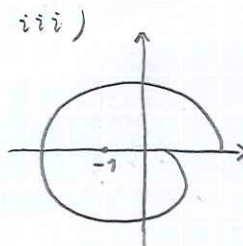
$$\Rightarrow P_{CL} = \# \text{ VARV SOM } \gamma \text{ GÖR KRING } -1$$

$\Rightarrow$ SLUTNA SYSTEMET STABILT OM KURVAN EJ OMJULTER -1 !

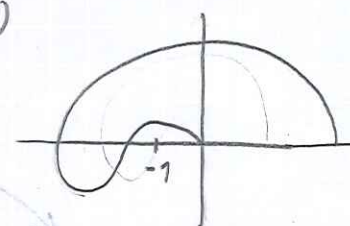
BETRakta KURVORNA

	VARV RUNT -1	STABILT?
i)	0	✓
ii)	0	✓
iii)	2 åt samma håll	✗
iv)	1 medurs, 1 moturs $\Rightarrow$ totalt 0	✓

Vi kan också se skillnad på iii) och iv) genom att betrakta HALVA Nyquist-kurvan (alltid symmetrisk!)



Totala argumentet runt -1 är 2π



Tot. arg. runt -1 $\ll 2\pi$

b) HUR PÅVERKAR K NYQUISTKURVAN.

SVAR: DEN SKALAS MED FAKTOR K !

VARFÖR: $\gamma' = G_0(s) \Big|_{\text{ser}} = K \cdot G(s) \Big|_{\text{ser}}$

$$\Rightarrow |\gamma'| = |KG| = |K| |G|$$

> ÄNDRAS ARGUMENTEN (VINKLARNAN)?
NEJ! $\arg(KG) = \arg K + \arg(G) = \arg(G)$

3.14 b)

i) "Kritisk punkt": 0,4

Om Nyquistkurvan skalas upp med K är den punkten i 0,4 K .

$\Rightarrow$ VILLKOR: $K \cdot 0,4 < 1 \Leftrightarrow K < \frac{5}{2}$

ii) "Kritisk punkt": 0, kan ej flyttas genom skalning ($K \cdot 0 = 0$)

STABILT $\forall K > 0$

iii) "Kritisk punkt": 2. Skala ned K så den punkten är innanför 1:

$\Rightarrow$ VILLKOR: $K \cdot 2 < 1 \Leftrightarrow K < \frac{1}{2}$

iv) Antingen: skala ned så hela kurvan är till höger om -1:

VILLKOR 1: $K \cdot 4 < 1 \Leftrightarrow K < \frac{1}{4}$

annars, skala inte ned så "kritiskpunkten" $K=2$ hamnar t.h. om -1

VILLKOR 2: $K \cdot 2 > 1 \Leftrightarrow K > \frac{1}{2}$

(Vi kan skala upp hur mycket vi vill!)

3.15 a) Uppgift: Rita Nyquistkurva för $G_0(s) = \frac{1}{s}$

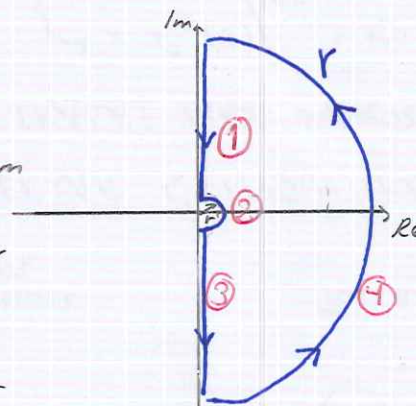
Lösning:

Pol i origo!

$\Rightarrow$ Mapping genom $G_0(s) = \frac{1}{s}$ ej def.

$\Rightarrow$ utslut 0 från genom liten omväg!

VARTÖR: Jo, om r är tillräckligt liten är vi säkra på att inte missa några andra poler i HHP!



* Vi AVBILDAR γ GENOM $G_0(s) \rightarrow \gamma'$ I 4 STEG:

① POSITIVA Im-AXELN: $s = i\omega$; $\omega: \infty \rightarrow 0$

$G(i\omega) = \frac{1}{i\omega} = -\frac{i}{\omega}$

∞ mappas till $\lim_{\omega \rightarrow \infty} -\frac{i}{\omega} = 0$ ← start

0 mappas till $\lim_{\omega \rightarrow 0} -\frac{i}{\omega} = -\infty \cdot i$ ← slut

② HALVCIRKELN RUNT ORIGO: $s = re^{i\theta}$, $r \rightarrow 0$, $\theta: \frac{\pi}{2} \rightarrow -\frac{\pi}{2}$

$G(re^{i\theta}) = \frac{1}{r} e^{-i\theta} \xrightarrow{r \rightarrow 0} \infty \cdot e^{-i\theta}$

$re^{i\frac{\pi}{2}}$ mappas till $\infty e^{-i\frac{\pi}{2}}$ ← start
 $re^{-i\frac{\pi}{2}}$ mappas till $\infty e^{i\frac{\pi}{2}}$ ← slut

③ NEGATIVA Im-AXELN $s = -i\omega$, $\omega: 0 \rightarrow \infty$

Nöjra! Nyquistkurvan är symmetrisk m.a.p. Re-axeln!

Koll: $G(i\omega) = \frac{1}{-i\omega} = \frac{i}{\omega}$

$-0 \rightarrow \infty \cdot i$ START

$-\infty \rightarrow 0 \cdot i$ SLUT

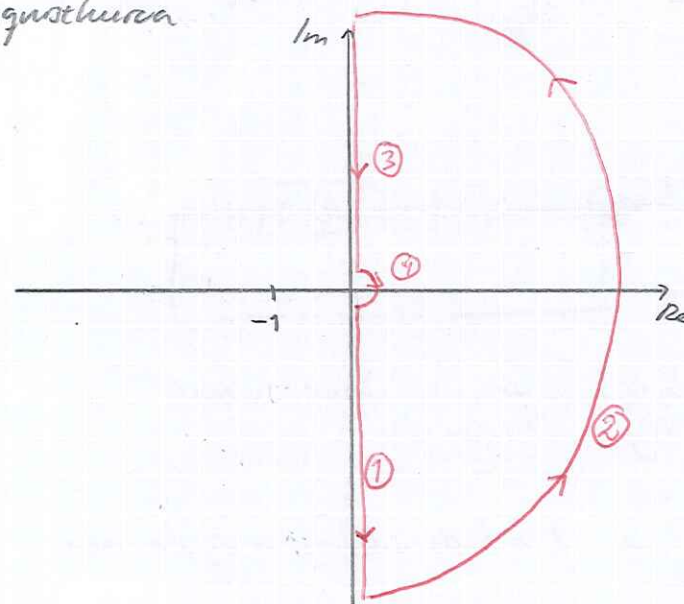
④ STORA HALVCIRKELN $s = Re^{i\theta}$, $r \rightarrow \infty$, $\theta: -\frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{\pi}{2}$

$G(Re^{i\theta}) = \frac{1}{R} e^{-i\theta}$

$Re^{-i\frac{\pi}{2}}$, $R \rightarrow \infty$, mappas till $0 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$ START

$Re^{i\frac{\pi}{2}}$, $R \rightarrow \infty$, mappas till $0 \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}}$ SLUT

3.15)
Nyquistkurva



• Hela kurvan t.h. om -1

• $G_0(s)$ har ingen pol i öppna HHP

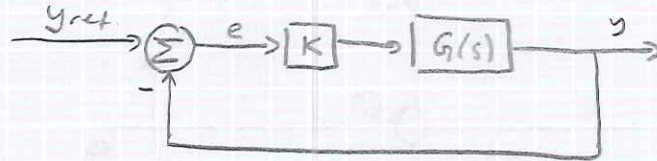
$\Rightarrow P_c = P_o + \# \text{VARV RUNT } -1 = 0 + 0$

↑
ANTAL POLER
HOS G_c
i HHP

13.16

MÅL: Analysera stabilitet m.h.j.a. Nyquistkurvan

Uppgift:



Vi vet: $G(s)$ asymptotiskt stabilt
• Nyquistkurva

- För vilka $K > 0$ är slutna systemet stabilt?
- Bestäm statiska felet e om y_{ref} är enhetssteg.
- För vilka K är systemet stabilt om regulatorn är $F(s) = \frac{K}{s}$ istället?

- Stabilitet för slutna systemet
↳ Beträkta öppna systemets Nyquistkurva!

Här: $G_0(s) = K \cdot G(s)$

Vi vet: $G(s)$ asymptotiskt stabilt
⇒ $G(s)$ har inga poler i HHP
 $G_0(s)$

⇒ Kan använda förenklade Nyquist-kriteriet (bok s. 78):

FÖRENKLAD NYQUISTKRIT.

Om G_0 inte har poler i HHP så är G_0 stabilt om -1 ligger t.v. om Nyquistkurvan!

Observation: Kurvan för $G(s)$ ($\leftrightarrow K=1$) omsluter -1 ! Ej stabilt!

Vi måste skala ned kurvan så att:

$$-1,5K = -\frac{3}{2}K > -1$$

$$\Leftrightarrow K < \frac{2}{3}$$

- Statiska felet:

Använd SLUTVÄRDESSATSEN!

Förutsättning: G_0 stabilt $\Leftrightarrow K < \frac{2}{3}$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s)$$

$$E(s) = Y_{ref}(s) - Y(s)$$

$$Y(s) = K G(s) \cdot E(s)$$

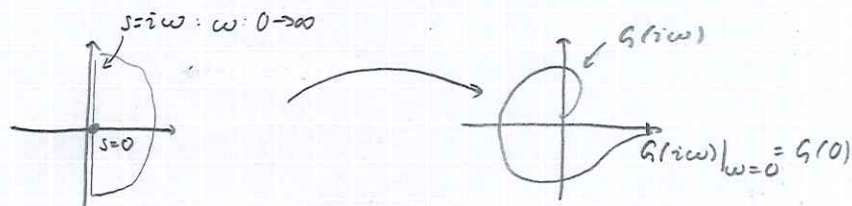
$$\Rightarrow E = Y_{ref} - K G E$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{1+KG} Y_{ref} \quad \text{enhetsteg}$$

$$\Rightarrow \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1+KG(s)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{1+KG(0)}$$

3.16. b) forts)

Läs av $G(0)$ i Nyquistdiagrammet:



$$\Rightarrow G(0) = 2$$

$\Rightarrow$ statiska felet (steady state error)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \frac{1}{1+K \cdot 2} \quad \text{för } K < \frac{2}{3}$$

c) Hur påverkas Nyquistkurvan γ av integrator?

Nu är $G_0(s) = \frac{K}{s} G(s)$ istället

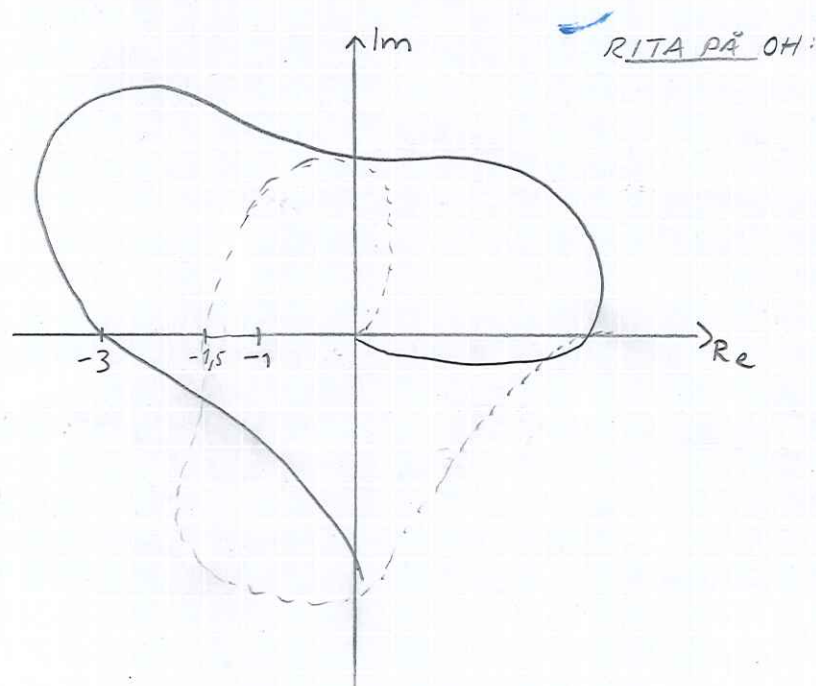
• Argumentet:

$$\arg(G_0(i\omega)) = \arg\left(\frac{K}{i\omega} G(i\omega)\right) = \underbrace{\arg K}_{0} - \underbrace{\arg(i\omega)}_{\frac{\pi}{2}} + \arg(G(i\omega)) = \arg(G(i\omega)) - \frac{\pi}{2}$$

• Beloppet:

$$|G_0(i\omega)| = \left| \frac{K}{i\omega} G(i\omega) \right| = \left\{ \arg \frac{K}{i\omega} = -\frac{\pi}{2} \right\} = \left| \frac{K}{i\omega} \right| |G(i\omega)| = \frac{K}{\omega} |G(i\omega)|$$

> Vi vrider kurvan -90° och skalar om den med $\frac{K}{\omega}$ (beror på ω !)



hamnar i punkt: -1.5 vid $\omega=10$

Ny " " : $-3 \cdot \frac{K}{\omega}$ vid $\omega=2$

Hur kan vi välja K så denna punkt hamnar t.h. om -1 ?

$$|G_0(i\omega)|_{\omega=2} < 1 \Rightarrow \frac{K}{2} |G(2i)| = \frac{K}{2} \cdot 3 < 1$$

$$\Rightarrow K < \frac{2}{3}$$