

ÖVNING 9

FÖRRA GÅNGEN

- lead lag - regulatorn - SE MINA INSTRUX
- Känslighetsfunktionen - DATORÖVNING

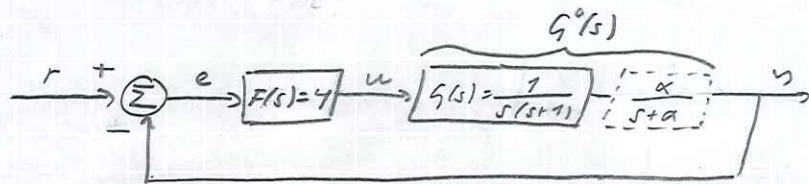
Om vi hinner: räknar G.1.

IDAG

- > Robusthet - teori "as we go"
- > Tillståndsbeskrivning - teori tillämpat på exempel

16.7 MÅL: Förstå robusthets-kriterier:
Vad händer vid modellfel?

3



ÖIKES.

a) ROTORT M.A.P. α FÖR SLUTNA
SYSTEMETS KAR. ERV.
STABILT FÖR VILKA α ? (FÖLJ STEG FÖR STEG)

$$1) G_c^0(s) = \frac{F(s)G(s)}{1 + F(s)G(s)} = \dots = \frac{4 \cdot \alpha}{s^2(s+1) + \alpha(4 + s(s+1))}$$

$\downarrow$
 $= G(s) \frac{\alpha}{s+a}$

2) Polerna ges av

$$\underbrace{s^2(s+1)}_{P(s)} + \alpha \underbrace{(4 + s(s+1))}_{Q(s)} = 0$$

$$P(s) = s^2(s+1)$$

$$Q(s) = 4 + s(s+1)$$

$$n=3$$

$$m=2$$

$n > m$ ☺

3) Startpunkter: $P(s)=0$ ($\Leftrightarrow \alpha=0$)

$$\Rightarrow s^2(s+1)=0$$

$$\boxed{s_{1,2}=0}$$

$$\boxed{s_3=-1}$$

4) Ändpunkter $Q(s)=0$ ($\Leftrightarrow \alpha=\infty$)

$$\Rightarrow 4 + s(s+1) = s^2 + s + 4 = 0$$

$$\boxed{s_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{15}}{2} \approx -0,5 \pm 1,9i}$$

4

5) $]-\infty, -1]$ tillhör rotorten.

6) 1 asymptot.

7) - (enbart en asymptot: riktningen är π)

8) $\phi = \frac{\pi}{7}$ ← utmed Re-axeln (syns redan på 5))

9) Skärningspunkter med Imn-axeln:

$$P(i\omega) + \alpha Q(i\omega) = 0$$

$$- \omega^2(i\omega + 1) + \alpha(4 - \omega^2 + i\omega) = 0$$

$$\text{Re-del: } -\omega^2 - \alpha\omega^2 + 4\alpha = 0$$

$$\text{Imn-del: } -\omega^3 + \alpha\omega = 0$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \alpha=0, \omega=0 \\ \text{eller} \\ \alpha=3, \omega=\pm\sqrt{3} \end{array} \right\}$$

STARTPUNKT

SKÄRNINGSPUNKTER

Lösning:

$$\text{Imn-del} \Rightarrow \alpha = \omega^2$$

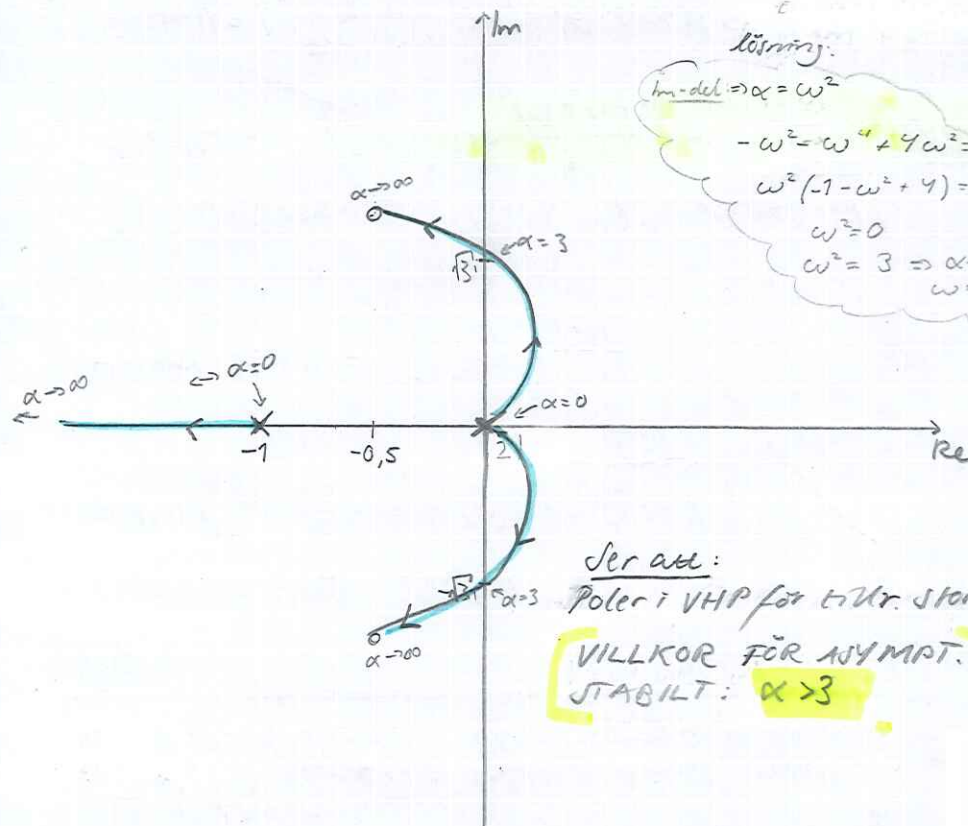
$$-\omega^2 = -\omega^4 + 4\omega^2 = 0$$

$$\omega^2(-1 - \omega^2 + 4) = 0$$

$$\omega^2 = 0$$

$$\omega^2 = 3 \Rightarrow \alpha = 3$$

$$\omega = \pm\sqrt{3}$$



Ser att:

Poler i VHP för tillr. stora α !

VILLKOR FÖR ASYMPT.

STABILT: $\alpha > 3$

6.7.3)

5

5) Använd ROBUSTHETSKRITERIET för att ta reda på för vilka α systemet är stabilt.

TEORI: ROBUSTHETSKRIT.

BOX 5.124-125

- ANTAG MODELL $G(s)$ SOM VI STABILISERAT MED REGULATOR $F(s)$.
- ANTAG MODELLFEL, DVS. VERKLIGA SYSTEMET ÄR

$$G^0(s) = G(s)(1 + \Delta_g(s)) \quad (*)$$

- OM VERKLIGA SYSTEMET ÄR PÅ STABILITETSGRÄNSEN: $|FG^0|_{\omega=\omega_c} = 1$
 $\varphi_m = 0 \Rightarrow \arg(FG^0)_{\omega=\omega_c} = -180^\circ = \pi$

alltså, $F(i\omega_c)G^0(i\omega_c) = -1$

$$\Leftrightarrow F(i\omega_c)G(i\omega_c)(1 + \Delta_g(i\omega_c)) = -1$$

$$\Delta_g(i\omega_c) = -\frac{1 + F(i\omega_c)G(i\omega_c)}{F(i\omega_c)G(i\omega_c)} = -\frac{1}{T(i\omega_c)}$$

- DENNA GRÄNS UPPNÅS E O M

$$|\Delta_g(i\omega)| < \frac{1}{|T(i\omega)|} \quad \forall \omega \quad (**)$$

VILKET ÄR ROBUSTHETSKRITERIET,

DVS. SLUTNA SYSTEMET MED $F(s)$ OCH $G^0(s)$ ENL. (*) FÖBLIR STABILT

ORJS VILLKOR:

6

V1: * $G^0(s), G(s)$ LIKA MÅNGA POLER I H+P

V2: * $F(s)G(s) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 0$ $F(s)G^0(s) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 0$ (strictly proper)

HÄR:

* IDENTIFIERA $\Delta_g(s)$.

$$G^0(s) = G(s) \cdot \frac{\alpha}{s + \alpha} = G(s) \underbrace{\left(1 + \frac{\alpha}{s + \alpha} - 1\right)}_{\Delta_g(s)}$$

$$\Leftrightarrow \Delta_g(s) = \frac{\alpha - s - \alpha}{s + \alpha} = -\frac{s}{s + \alpha}$$

* ROBUSTHETSKRIT: (KOLLA V1, V2 UPPFYLDA!)

• Vi vill att $|T(i\omega)| < \frac{1}{|\Delta_g(i\omega)|} = \left| \frac{i\omega + \alpha}{-i\omega} \right| = |f(i\omega)|$

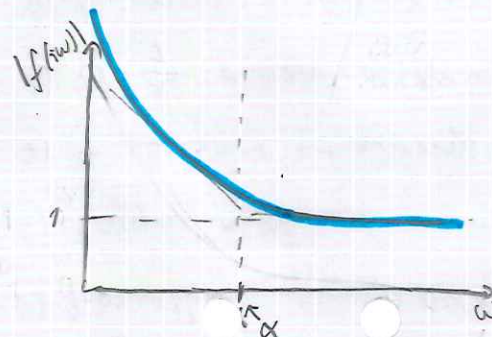
• $|T(i\omega)| = \left| \frac{F(i\omega)G(i\omega)}{1 + F(i\omega)G(i\omega)} \right| = |G_c(i\omega)| \leftarrow$ GIVET I BODE-PLOT!

• KRAV: $|f(i\omega)| > |G_c(i\omega)|$ (BETRAKTA BODE FÖR $f(i\omega) = \frac{i\omega + \alpha}{-i\omega}$)

• LÅG FREKV. ASYMPTOT: $\frac{\alpha}{\omega}$, lutning -1, startar i ∞ .

• HÖG FREKV. ASYMPTOT: $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{\omega} = -1$; lutning 0.

• BRYTPUNKT $1/\alpha$!



• KRITERIET ÄR UPPFYLTT OM $|G_c(i\omega_R)| < |f(i\omega_R)|$

Resonans toppen, vid resonansfrekw. ω_R

Om $|f(i\omega)|$ är större vid resonans toppen, är det det för alla ω !

6.7.5) form!

$$|G(i\omega_R)| = 2, \omega_R = 2$$

$$\Rightarrow |f(i\omega_R)| = \left| \frac{2i + \alpha}{-2i} \right| = \frac{\sqrt{4 + \alpha^2}}{2} > 2$$

$$\alpha > 0 \Rightarrow \alpha > \sqrt{12}$$

c) ROBUSTHETSKRIT KRÄVER $\alpha > \sqrt{12} \approx 3,4$
ROTORTEN GAV $\alpha > 3$.

VARFÖR?

> ROBUSTHETSKRIT. ÄR ETT TILLRÄCKLIGT
VILLKOR FÖR STABILITET ($\Rightarrow$, om)

> POLER STRIKT I VHP ÄR TILLR. OCH
NÖDVÄNDIGT VILLKOR FÖR STABILITET.
($\Leftrightarrow$, om)

I DETTA FALL BLIR ROBUSTHETSKRIT.
KONSERVATIVT!

7

8.2 | MÅL: Förstå tillståndsbeskrivning och linjärisering

UPPGIFT: Skriv diff. ekr.

$$l\ddot{\theta} + g \sin \theta + \dot{\alpha} \cos \theta = 0$$

(1)

på tillståndsform, och linjärisera.

$$\text{Låt } \underbrace{x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{\text{TILLSTÄND}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}}_{\text{INSIGNAL}}, \underbrace{u = \frac{1}{l} \ddot{z}}_{\text{INSIGNAL}}, \underbrace{y = \theta = x_1}_{\text{UTSIGNAL}}$$

TILLSTÄNDSBESKRIVNING.

$$\begin{array}{ccc} \text{OLINJÄR} & \xrightarrow{\text{Linjärisering}} & \text{LINJÄR} \\ \dot{x} = f(x, u) & & \dot{x} = Ax + Bu \\ y = h(x, u) & & y = Cx + Du \end{array}$$

STRATEGI

- 1) SKRIV PÅ (OLINJÄR) TILLSTÄNDSFORM
- 2) HITA LINJÄR UERINGS PUNKT
- 3) TAYLORUTVECKLA/HITA JACOBIANER
- 4) SKRIV PÅ LINJÄR FORM

Bok s. 155

1) / 1) ger:

$$l \cdot \ddot{x}_2 + g \sin x_1 + l \cdot u \cdot \cos x_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \ddot{x}_2 + \frac{g}{l} \sin x_1 + u \cdot \cos x_1 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{l} \sin x_1 - u \cos x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x, u) \\ f_2(x, u) \end{bmatrix}$$

$$y = x_1 = h(x, u)$$

8.2 form 1

9

2) LINJÄRISERINGS/PKT/JÄMVIKTPUNKT x_0, u_0

ges av lösning till $f(x_0, u_0) = 0$

HÄR: GIVET $x_0 = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}$ $u_0 = 0$

← OBS! INSTABILA
JÄMVIKTS-
PUNKTEN!

$$\left(\begin{array}{l} \text{KONTROLLERA:} \\ f_1(x_0, u_0) = x_{2,0} = 0 \\ f_2(x_0, u_0) = -\frac{g}{L} \sin \pi - 0 \cdot \cos \pi = 0 \end{array} \right)$$

3) SERIEUTVECKLING

Låt $x = x_0 + \Delta x$, $u = u_0 + \Delta u$

TAYLORS-
DERIVATA $\Rightarrow \dot{x} = \Delta \dot{x} = f(x_0, u_0) + f_x(x_0, u_0) \Delta x + f_u(x_0, u_0) \Delta u + \dots$

$$\Delta y = h_x(x_0, u_0) \Delta x + h_u(x_0, u_0) \Delta u + \dots$$

De linjära termerna ges:

$$\begin{cases} \Delta \dot{x} = A \Delta x + B \Delta u \\ \Delta y = C \Delta x + D \Delta u \end{cases}$$

ÄR A, B, C, D ÄR JACOBIANER.

HÄR: $A = f_x(x_0, u_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}_{x_0, u_0}$ $B = f_u = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{pmatrix}$

$$C = h_x = \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1} & \frac{\partial h}{\partial x_2} \end{pmatrix} \quad D = h_u = \frac{\partial h}{\partial u}$$

10

$$\bullet \frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 1 \quad ; \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = -\frac{g}{L} \cos \pi + u \sin \pi$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L} \cos \pi + 0 & 0 \end{pmatrix}_{x_0, u_0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -g/L & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \frac{\partial f_1}{\partial u} = 0 \quad , \quad \frac{\partial f_2}{\partial u} = -\cos \pi$$

$$\Rightarrow B = \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos \pi \end{pmatrix}_{x_0, u_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \frac{\partial h}{\partial x_1} = 1 \quad ; \quad \frac{\partial h}{\partial x_2} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial h}{\partial u} = 0$$

$$\Rightarrow C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = 0$$

SYSTEMET BLIR:

Låt $\Delta x = \tilde{x}$, $\Delta u = \tilde{u}$, $\Delta y = \tilde{y}$

$$\dot{\tilde{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega_0^2 & 0 \end{pmatrix} \tilde{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tilde{u}$$

GIVET!
($g/L = \omega_0^2$)

$$\tilde{y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \tilde{x}$$

← VERIFIERA,
INSTABILT!

11

→ GÅ MELLAN ÖVERTFÖRINGSFUNKTION OCH TILLSTÄNDSFORM

ÖF $\xrightarrow[\text{Bok s. 156-155}]{\text{flera sätt...}}$ TILLSTÄND

$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$

Ex. TAL 8.6!

8.3/ Skriv systemet på tillståndsform.

Givet: $u = \begin{bmatrix} i \\ m_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$, utsignal y

1) Välj tillstånd.

- Notera: om $X = \frac{1}{s} Y$ så är $\dot{X} = Y$.
- Välj tillstånd utefter $\frac{1}{s}$ -blocken: varje tillstånd får 1:a ordningens diff. eqn.

$x_1 = y$; $x_2 = \theta$; $x_3 = z$

2) Relationer (från Blockdiagram)

$X_1(s) = Y(s) = \frac{1}{s} (M_e(s) + K_2 X_2(s))$

$X_2(s) = \theta(s) = \frac{1}{s} (X_3(s) - X_1(s))$

$X_3(s) = Z(s) = \frac{1}{s} (M_I(s) - M_e(s)) = \frac{1}{s} (K_2 I(s) - K_2 X_2(s))$

$\mathcal{L}^{-1}$: $\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) = u_2(t) + K_2 x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t) - x_1(t) \\ \dot{x}_3(t) = K_2 u_1(t) - K_2 x_2(t) \end{bmatrix}$

3) PÅ MAJNISFORM

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & K_2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -K_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \\ K_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$
$$y = (1 \quad 0 \quad 0) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

8.4. c) / Skriv: $G(s) = \frac{2s+3}{s^2+s+6}$

på tillståndsform.

> STYRBAR KANONISK FORM:

antag: $G(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$y(t) = (b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_n) x(t)$

> OBSERVERBAR KANONISK FORM:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} u(t)$$

FRÅN BOKEN S. 158-159

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x(t)$$