

ÖVNING 10

10A4: Tillståndsför-
mått

8.4.c) Tillståndsför- (kanonisk form)

8.2. Längd

8.13 — — — , Styrbarhet

(8.10 om tid)

Anteckningarna ingår även

9.1 (utgår från övningar 2017)

8.3 (från övning 9)

11

GA MELLAN ÖVERFÖRINGSFUNKTION OCH TILLSTÄNDSFORM

ÖF $\xrightarrow[\text{Bok s. 156-159}]{\text{flera sätt...}} \text{TILLSTÄND}$

$G(s) = (C(sI - A)^{-1}B + D)$

Ex. TAL 8.6!

8.3/ Skriv systemet på tillståndsform.

Givet: $u = \begin{bmatrix} i \\ m_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$, utsignal y

1) Välj tillstånd.

- Notera: om $X = \frac{1}{s} Y$ så är $\dot{x} = y$.
- Välj tillstånd utefter $\frac{1}{s}$ -blocken: varje tillstånd får 1:a ordningens diff. eqn.

$x_1 = y$, $x_2 = \theta$, $x_3 = z$

2) Relationer (från Blochdiagram)

$X_1(s) = Y(s) = \frac{1}{s} (M_2(s) + K_2 X_2(s))$

$X_2(s) = \Theta(s) = \frac{1}{s} (X_3(s) - X_1(s))$

$X_3(s) = Z(s) = \frac{1}{s} (M_1(s) - M_2(s)) = \frac{1}{s} (K_1 I(s) - K_2 X_2(s))$

$\mathcal{L}^{-1}$: $\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) = u_2(t) + K_2 x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t) - x_1(t) \\ \dot{x}_3(t) = K_1 u_1(t) - K_2 x_2(t) \end{bmatrix}$

3) PÅ MARRISFORM

$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & K_2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -K_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \\ K_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$

$y = (1 \ 0 \ 0) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

8.4. c) / Skriv: $G(s) = \frac{2s+3}{s^2+s+6}$

på tillståndsform.

> STYRBAR KANONISK FORM:

antag: $G(s) = \frac{b_n s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}$

$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$

$y(t) = (b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n) x(t)$

> OBSERVERBAR KANONISK FORM:

$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} u(t)$

8.4 c) form 1

$$y = (1 \ 0 \ \dots \ 0) x(t)$$

Här:

$$G(s) = \frac{\overset{b_1 s^1}{2s} + \overset{b_2}{3}}{\underset{s^2}{s^2} + \underset{a_1 s^1}{5s} + \underset{a_2}{6}}$$

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

$$y = (2 \ 3) x(t)$$

alt.

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ -6 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} u(t)$$

$$y = (1 \ 0) x(t)$$

6.7.5) form!

$$|G(i\omega_r)| = 2, \omega_r = 2$$

$$\Rightarrow |f(i\omega_r)| = \left| \frac{2i + \alpha}{-2i} \right| = \frac{\sqrt{4 + \alpha^2}}{2} > 2$$

$\alpha > 0$

$\Rightarrow$

$$\alpha > \sqrt{12}$$

c) ROBUSTHETSKRIT KRÄVER $\alpha > \sqrt{12} \approx 3,4$
ROTORTEN GAV $\alpha > 3$.

VARFÖR?

> ROBUSTHETSKRIT. ÄR ETT TILLRÄCKLIGT
VILLKOR FÖR STABILITET ($\Rightarrow$, om)

> POLEA STRIKT I VHP ÄR TILLR. OCH
NÖDVÄNDIGT VILLKOR FÖR STABILITET.
($\Leftarrow$, om)

DETTA FALL BLIR ROBUSTHETSKRIT.
KONSERVATIVT!

8.2 | MÅL: förstå tillståndsbeskrivning
och linjärisering

UPPGIFT: Skriv diff. ekr.

$$l\ddot{\theta} + g \sin \theta + \dot{z} \cos \theta = 0$$

(1)

på tillståndsform, och linjärisera.

$$\text{låt } \underbrace{x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{\text{TILLSTÄND}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}}_{\text{INSIGNAL}}, \quad \underbrace{u = \frac{1}{l} \cdot \ddot{z}}_{\text{INSIGNAL}}, \quad \underbrace{y = \theta = x_1}_{\text{UTSIGNAL}}$$

TILLSTÄNDSBESKRIVNING.

$$\begin{array}{ccc} \text{OLINJÄR} & \xrightarrow{\text{linjärisering}} & \text{LINJÄR} \\ \dot{x} = f(x, u) & & \dot{x} = Ax + Bu \\ y = h(x, u) & & y = Cx + Du \end{array}$$

STRATEGI

- 1) SKRIV PÅ (OLINJÄR) TILLSTÄNDSFORM
- 2) HITA LINJÄR VERINGS PUNKT
- 3) TAYLORUTVECKLA/HITA JACOBIANER
- 4) SKRIV PÅ LINJÄR FORM

Bok s. 155

1) 1) ger:

$$l \cdot \ddot{x}_2 + g \sin x_1 + \dot{z} \cdot \cos x_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \ddot{x}_2 + \frac{g}{l} \sin x_1 + u \cdot \cos x_1 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{l} \sin x_1 - u \cos x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x, u) \\ f_2(x, u) \end{pmatrix}$$

$$y = x_1 = h(x, u)$$

8.2 form 1

9

2) LINJÄRISERINGS/PKT/JÄMVIKTPUNKT x_0, u_0

ges av lösning till $f(x_0, u_0) = 0$

HÄR: GIVET $x_0 = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}$ $u_0 = 0$

← OBS! INSTABILA
JÄMVIKTS-
PUNKTEN!

$$\left(\begin{array}{l} \text{KONTROLLERAD:} \\ f_1(x_0, u_0) = x_{2,0} = 0 \\ f_2(x_0, u_0) = -\frac{g}{L} \sin \pi - 0 \cdot \cos \pi = 0 \end{array} \right)$$

3) SERIEUTVECKLING

Låt $x = x_0 + \Delta x$, $u = u_0 + \Delta u$

TÄTIDS-
DERIVATA $\Rightarrow \dot{x} = \Delta \dot{x} = f(x_0, u_0) + f_x(x_0, u_0) \Delta x + f_u(x_0, u_0) \Delta u + \dots$

$$\Delta y = h_x(x_0, u_0) \Delta x + h_u(x_0, u_0) \Delta u + \dots$$

De linjära termerna ges:

$$\begin{cases} \Delta \dot{x} = A \Delta x + B \Delta u \\ \Delta y = C \Delta x + D \Delta u \end{cases}$$

ÄR A, B, C, D ÄR JACOBIANER.

HÄR:

$$A = f_x(x_0, u_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}_{x_0, u_0} \quad B = f_u = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{pmatrix}$$

$$C = h_x = \left(\frac{\partial h}{\partial x_1} \quad \frac{\partial h}{\partial x_2} \right) \quad D = h_u = \frac{\partial h}{\partial u}$$

10

$$\bullet \frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 1 \quad ; \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = -\frac{g}{L} \cos \pi + u \sin \pi,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L} \cos \pi + 0 & 0 \end{pmatrix}_{x_0, u_0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -g/L & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \frac{\partial f_1}{\partial u} = 0 \quad , \quad \frac{\partial f_2}{\partial u} = -\cos \pi,$$

$$\Rightarrow B = \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos \pi \end{pmatrix}_{x_0, u_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \frac{\partial h}{\partial x_1} = 1 \quad , \quad \frac{\partial h}{\partial x_2} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial h}{\partial u} = 0$$

$$\Rightarrow C = (1 \quad 0) \quad D = 0$$

SYSTEMET BLIR:

Låt $\Delta x = \tilde{x}$, $\Delta u = \tilde{u}$, $\Delta y = \tilde{y}$

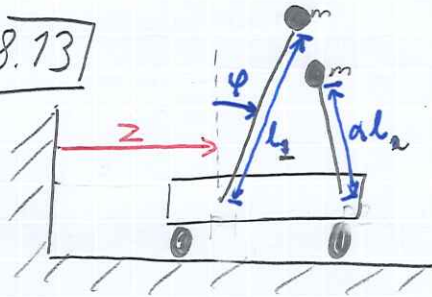
$$\dot{\tilde{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega_0^2 & 0 \end{pmatrix} \tilde{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tilde{u}$$

GIVET!
($g/L = \omega_0^2$)

$$\tilde{y} = (1 \quad 0) \tilde{x}$$

← VERIFIERA,
INSTABILT!

18.13



- Vagn med pendlar
- Försöker hålla pendlarna uppe genom att föra vagnen fram och tillbaka
- Ingen friktion

hnet:

$$\ddot{z} \cos \varphi_i + \ddot{\varphi}_i l_i = g \sin \varphi_i$$

för $i=1,2$

a) Linjärisera systemet runt $\varphi=0$.

• sätt $l_i = m = g = 1$

• skriv på formen $\dot{x} = Ax + Bu$

b) För vilka α är systemet styrbart?
GISSNING?

a) STRATEGI: (FÖRRA GÅNGEN)

1) VÄLJ TILLSTÄND

2) SKRIV PÅ OLINJÄR TILLSTÄNDSFORM

3) HITA JÄMVIKTPUNKT

4) TAYLORUTVECKLA/BERÄKNA JACOBIANER

5) SKRIV PÅ LINJÄR FORM

STRATEGI: IDAG

1) LINJÄRISERA DIFFERV

2) VÄLJ TILLSTÄND

3) SKRIV PÅ TILLSTÄNDSFORM.

Snabbare!!

3

$$1) \ddot{z} \cos \varphi_1 + \ddot{\varphi}_1 l_1 = g \sin \varphi_1 \leftarrow \text{Pendel 1}$$

$$\ddot{z} \cos \varphi_2 + \ddot{\varphi}_2 \alpha l_1 = g \sin \varphi_2 \leftarrow \text{Pendel 2}$$

1:a ordningens approx:

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots$$

$\Rightarrow$ sätt in $l_1 = m = g = 1$:

$$\ddot{z} + \ddot{\varphi}_1 = \varphi_1 \quad (1)$$

$$\ddot{z} + \alpha \ddot{\varphi}_2 = \varphi_2 \quad (2)$$

NI KAN VÄLJA
VAD SOM HELST
JÄ LÄNGE DIFF-
EKV. SÄR ATT
UTRYCKA I
SÅR TILLSTÄND

2) Välj tillstånd:

$$x_1 = \varphi_1 ; x_2 = \dot{\varphi}_1 ; x_3 = \varphi_2 ; x_4 = \dot{\varphi}_2 ;$$

$$u = \ddot{z}$$

3) Skriv om (1) och (2):

$$\dot{x}_1 = \dot{\varphi}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{\varphi}_1 = \varphi_1 - \ddot{z} = x_1 - u$$

$$\dot{x}_3 = \dot{\varphi}_2 = x_4$$

$$\dot{x}_4 = \ddot{\varphi}_2 = \frac{1}{\alpha}(\varphi_2 - \ddot{z}) = \frac{1}{\alpha}(x_3 - u)$$

På matrisform:

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\alpha} & 0 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -\frac{1}{\alpha} \end{bmatrix}}_B u$$

8.13. 6

Styrbarhetsmatrisen:

$$S = [B \ AB \ A^2B \ A^3B]$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1/\alpha \end{bmatrix} \quad AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/\alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1/\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1/\alpha \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A^2B = A \cdot AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/\alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1/\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1/\alpha^2 \end{bmatrix}$$

$$A^3B = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1/\alpha^2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow S = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1/\alpha & 0 & -1/\alpha^2 \\ -1/\alpha & 0 & -1/\alpha^2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Räkna...}$$

$$\det(S) = \frac{(\alpha-1)^2}{\alpha^4}$$

$$\Rightarrow \det(S) \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 1$$

$\Rightarrow$ Systemet styrbart om och endast om $\alpha \neq 1$.

$\Rightarrow$ Pendlarna behöver ha olika längd för att kunna styras oberoende av varandra!

5

9.1

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

OBS!
Styrbar kanonisk form! s. 158

a) Beräkna tillstånd återkoppling så polerna hamnar i

i) $-3, -5$

ii) $-10, -15$

Kom ihåg: poler = A's egenvärden!

b) Antag att enbart utsignalen kan mätas. Beräkna observatör så att vi får samma ÖF från $y_4 \rightarrow y$ som i a).

a) Återkoppling:

1)

$$u(t) = \overset{1 \times 1}{-L} \overset{1 \times 2}{x(t)} + \overset{2 \times 1}{\tilde{r}(t)} \overset{1 \times 1}{1}$$

• Slutna systemet blir:

$$\dot{x} = (A - BL)x + B\tilde{r}$$

$$y = Cx$$

• Polerna ges av EV till $A - BL$

$$BL = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [l_1 \ l_2] = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

STRATEGI a)

1) Beräkna $A - BL$

2) Beräkna poler $\leftarrow L$

3) Välj L för att placera poler

9.1. a) forts.)

Så $A - BL = \begin{bmatrix} -2 - \lambda_1 & -1 - \lambda_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

2) • Karakteristisk eqv:

$$\det(A - BL - \lambda I) = -\lambda(-2 - \lambda_1 - \lambda) + 1 + \lambda_2 = \lambda^2 + (2 + \lambda_1)\lambda + 1 + \lambda_2$$

• Poler: p_1, p_2 mnebär:

$$(\lambda - p_1)(\lambda - p_2) = \lambda^2 - (p_1 + p_2)\lambda + p_1 p_2 = 0$$

jt α_1, α_2 på s. 179f

• identifiera:

$$2 + \lambda_1 = -p_1 - p_2 \Rightarrow \lambda_1 = -p_1 - p_2 - 2$$

$$1 + \lambda_2 = p_1 p_2 \Rightarrow \lambda_2 = p_1 p_2 - 1$$

3) • i) $\lambda_1 = 3 + 5 - 2 = 6$
 $p_1 = -3, \lambda_2 = 3 \cdot 5 - 1 = 14$
 $p_2 = -5$ } $L_{ij} = \begin{bmatrix} 6 & 14 \end{bmatrix}$

• ii) $\lambda_1 = 10 + 15 - 2 = 23$
 $p_1 = -10, \lambda_2 = 10 \cdot 15 - 1 = 149$
 $p_2 = -15$ } $L_{ij} = \begin{bmatrix} 23 & 149 \end{bmatrix}$

OBS) Insignalen blir jättestor om vi väljer poler långt från origo.

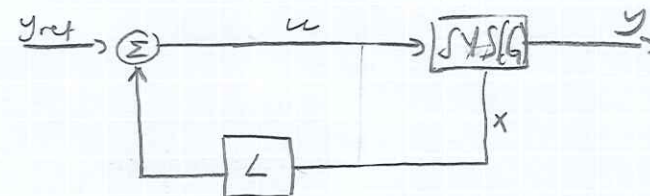
(hade vi kunnat välja komplexa poler? JA!)
 krav: komplexkonjugerade)

7

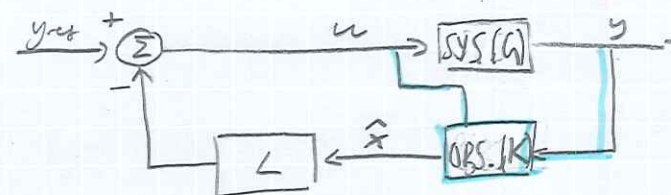
9.1b) OBSERVATÖR

8

Vanlig tillstånd återkoppling:



Om vi inte har tillgång till x får vi försöka rekonstruera tillståndet från y .



Boh s. 191-193

Teori:

• K återkopplar från skattningsfelet $y - C\hat{x}$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu + K(y - C\hat{x}) = \\ &= (A - KC)\hat{x} + Bu + Ky \end{aligned}$$

• $\tilde{x} := x - \hat{x}$ ska gå snabbt mot noll

$$\tilde{x}(t) = e^{(A - KC)t} \tilde{x}(0)$$

$\Rightarrow$ går snabbare om egenvärden till $A - KC$ ligger långt ut i VHP.

> Placera poler/ev. till $A - KC$ på gynnsamt sätt!

> Möjligt om systemet är observerbart

↑
 { enkelt om sys. på obs. bar }
 { kanonisk form }

9.1.5) forts

HÄR:

> Observerbarhet?

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}; \det O = -1 \neq 0$$

JA ☺

> Välj poler längre ut i VHP än systemets poler
t.ex. **-20** ← dubbelpol!

$$A - KC = \begin{bmatrix} -2 - k_1 & -1 \\ 1 - k_2 & 0 \end{bmatrix}$$

↑ NACKDEL OM
FÖR LÅNGT UT I
KÄNLIKHET FÖR
BRUS.

$$\det(A - KC - \lambda I) = -\lambda(-2 - k_1 - \lambda) + (1 - k_2) =$$

$$= \lambda^2 + (2 + k_1)\lambda + 1 - k_2$$

$$\lambda^2 + 40\lambda + 400 = (\lambda + 20)^2 \leftarrow \text{önskad kar. ekv.}$$

Identifiera:

$$\begin{aligned} 2 + k_1 &= 40 & \Rightarrow k_1 &= 38 \\ 1 - k_2 &= 400 & \Rightarrow k_2 &= -399 \end{aligned}$$

$$K = \begin{bmatrix} 38 \\ -399 \end{bmatrix}$$

9

18.10 UPPGIFT:

10

> BERÄKNA STYRBARA RESP. ICKE-OBJERN-
ERBARA UNDERUM, SAMT DERAS DIMENSIONER

• Styrbara tillstånd ges av $\text{span}\{S_u\}$ där

$$S = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

$\underbrace{\quad}_{S_1} \quad \underbrace{\quad}_{S_2}$

• Icke observerbara tillstånd ges av $\ker(O)$
Nollrum

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

a) $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $C = [1 \ 3 \ 1.5]$

$$S = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -1 & 3 & -9 \\ 2 & -6 & 18 \end{bmatrix}$$

lin. beroende!

rank $S = 2$

$$R_S = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix} \right\}$$

$$O = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1.5 \\ -2 & -3 & -1.5 \\ 4 & 3 & 1.5 \end{bmatrix}$$

lin. beroende!
2x!

Rank $O = 2 \Rightarrow \dim \ker(O) = 1$

Beräkna $\ker(O)$:

$$Ox = 0$$

$$\ker O = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1.5 & 0 \\ 0 & 3 & 1.5 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \quad 3x_2 + 1.5x_3 = 0$$