

ÖVNING 3 (2017)

IDAG: ROTORT

VAD ÄR EN ROTORT?

ROT TILL
EKVATION.

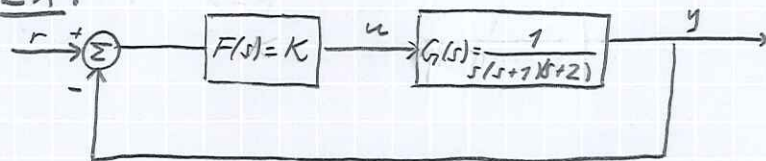
OFTAST: POL-POLYNOM

VAR FINNS DE?

BEROENDE PÅ EN
PARAMETER

OFTA: FÖRSTÄRKNING K I
REGULATOR.

EX:



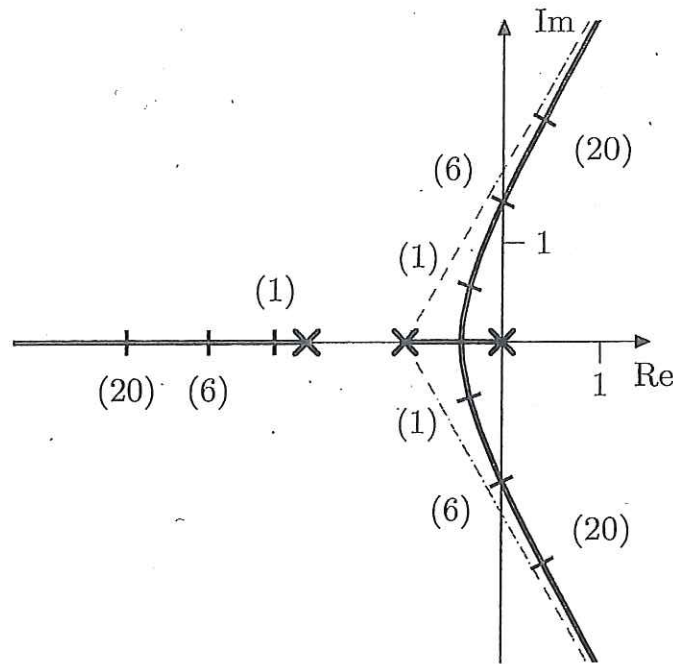
$$G_{cl}(s) = \frac{F(s)G(s)}{1 + F(s)G(s)} = \frac{K}{s(s+1)(s+2)} \cdot \frac{1}{1 + \frac{K}{s(s+1)(s+2)}} = \frac{K}{s(s+1)(s+2) + K}$$

- POLER GES AV $s(s+1)(s+2) + K = 0$
= RÖTTER TILL KAR. EKV.

- BEROR PÅ K :
 - STABILT FÖR VILKA K ? ALLA? STORA? SMÅ?
 - OSCILLATIVT?
 - ROBUST?

ROTORT GER SVAR

• SE EX 3.5 I BOKEN (S. 72)



Figur 3.21: Rotort för exempel 3.5. Startpunkter ($K = 0$) markeras med kryss. Siffrorna inom parentes anger K -värden för de med tvärstreck markerade punkterna på rotorten.

BOK EXEMPEL 3.5, s. 71-72

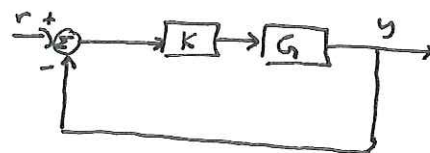
• Rotort för karakteristiska ekvationen

$$s(s+1)(s+2) + K = 0 \quad (*)$$

• Systemet stabilt (poler i VHP) för $0 < K < 6$, instabilt (poler i HHP) för $K > 6$.

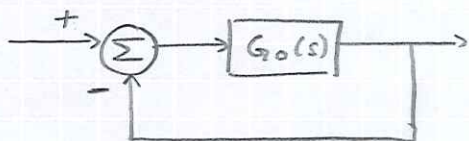
(*) Nämnar-polynom till $G_{CL}(s)$ om

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)} \quad F(s) = K$$



$$G_{CL}(s) = \frac{F(s)G(s)}{1 + F(s)G(s)} = \frac{K}{s(s+1)(s+2) \left(1 + \frac{K}{s(s+1)(s+2)} \right)} = \frac{K}{s(s+1)(s+2) + K}$$

13.5) a) MÅL: Rita ROTORT
 Hur beror polerna av parameter.



Uppgift: Rita rotort m.a.p. K för systemet ovan, med

$$G_o(s) = \frac{K(s+2)}{s(s+1)(s+3)}$$

För vilka K är systemet stabilt?

SE BOK s. 65-68!

Lösning:

- STRATEGI:
- 1) Hitta $G_{cl}(s)$
 - 2) TA FRAM START- & SLUTPUNKTER, ASYMPTOTER M.M.
 - 3) RITA ROTORT
 - 4) TOLKA ROTORT

1) Det slutna systemet:

$$\begin{aligned} G_{cl} &= \frac{G_o}{1 + G_o} = \frac{K(s+2)}{s(s+1)(s+3) \left(1 + \frac{K(s+2)}{s(s+1)(s+3)}\right)} \\ &= \frac{K(s+2)}{s(s+1)(s+3) + K(s+2)} = \frac{Q(s)}{P(s) + KQ(s)} \end{aligned}$$

2) Poler ges av rötter till G_{cl} , dvs.

$$P(s) + KQ(s) = 0$$

med

$$P(s) = s(s+1)(s+3)$$

$$Q(s) = s+2$$

$$n=3$$

$$m=1$$

$$(n \geq m)$$

* STARTPUNKTER : $K=0$ (se OH!)

$$P(s)=0 \Rightarrow \begin{matrix} s=0 \\ s=-1 \\ s=-3 \end{matrix}$$

* ÄNDPUNKTER : $K=\infty$ (se OH!)

$$Q(s)=0 \Rightarrow s=-2$$

⇒ * PUNKTER PÅ RE-AXELN SOM TILLHÖR ROTORTEN (se OH!)

* ANTAL ASYMPTOTER: $n-m=2$

se s. 67!

* SKÄRNINGSPUNKT: UTGÅNGSPUNKT FÖR

"STRÅLARNA" SOM UTGÖR ASYMPTOTER:

$$\begin{aligned} SP &= \frac{1}{n-m} (\sum \text{startpunkter} - \sum \text{ändpunkter}) = \\ &= \frac{1}{3-1} (0-1-3 - (-2)) = \frac{1}{2} \cdot (-2) = -1 \end{aligned}$$

3.5-form 1

* RIKTNING FÖR ASYMPTOTER

från att

$$\arg\left(\frac{P(s)}{Q(s)}\right) = \arg(-K) = \pi + 2\pi k$$

för att (för stora s)

$$\varphi = \frac{\pi}{n-m} + 2k \cdot \frac{\pi}{n-m} \quad k=0, 1, \dots, n-m-1 \quad \text{SE BOKEN!}$$

här: $\varphi = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, $k=0, 1, \Rightarrow$ $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$
 $\varphi_2 = \frac{3\pi}{2}$

$\Rightarrow$ ASYMPTOTERNA STARTAR I
 SKÄRNINGSPUNKTEN SP OCH
 GÅR UT I RIKTNINGARNA
 $\varphi_1 = \pi/2$, $\varphi_2 = 3\pi/2$

* SKÄRNING MED IMAG. AXELN

vätt $s=i\omega$ i $P(s)+KQ(s)=0$,

lös m.a.p. ω, K .

här:

$$i\omega(i\omega+1)(i\omega+3) + K(i\omega+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (-4\omega^2 + 2K) + i(-\omega^3 + (3+K)\omega) = 0 + 0i$$

• Real del = 0: $-4\omega^2 + 2K = 0$

$$\omega = \pm \sqrt{K/2}$$

OCH

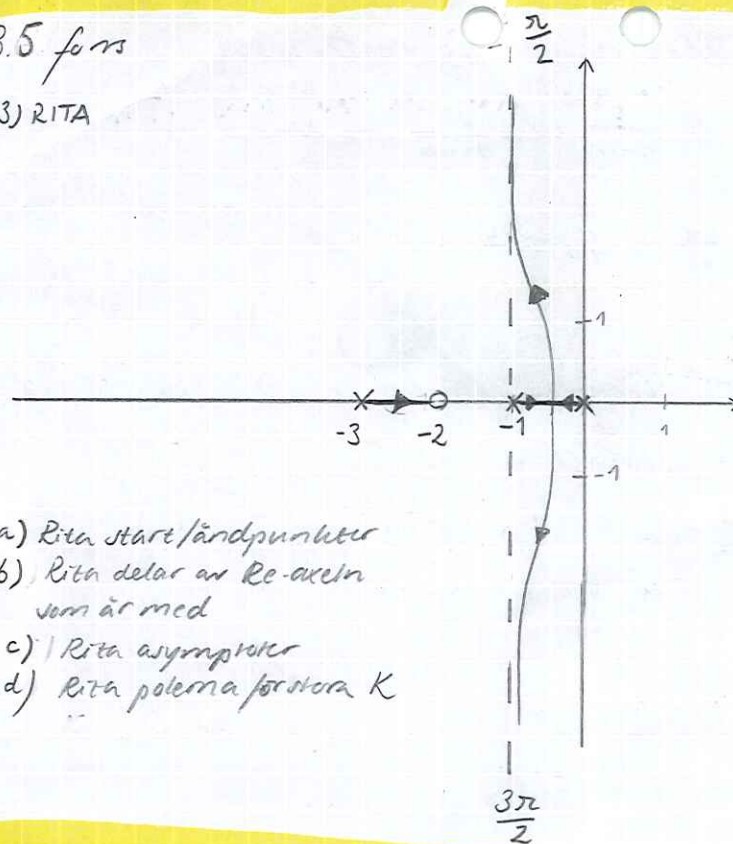
• Imaginär del = 0: $\omega = 0$, $\omega = \pm \sqrt{3+K}$

$\Rightarrow$ ENDA LÖSNING: $K=0$, $\omega=0$

① Intressant, asymptoterna och startpunkterna
 är alla i VHP, utom startpunkt i 0.

3.5 forts

3) RITA



- Rita start/ändpunkter
- Rita delar av Re-axeln som är med
- Rita asymptoter
- Rita polerna för stora K

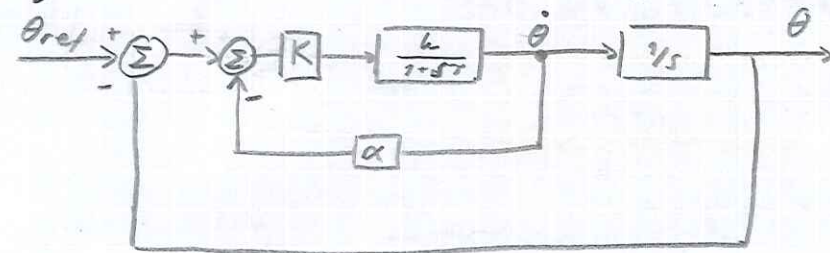
4) OBSERVATIONER

- POLER ALLTID STRIKT I VHP FÖR $K > 0$
- REELLA POLER FÖR SMÅ K (INGA SVÄNGNINGAR)
- AVSTÅNDET TILL ORIGO FÖR DEN NÄRMASTE POLEN ÖKAR MED K (INABBARE!)
- SVÄNGIGT SYSTEM FÖR STORT K .

3.6

Uppgift

System: DC-motor med servosystem



$$\tau = 0,5$$

$$k = 2$$

- Rita rotorell för $\alpha = 0$, m.a.p K
- Rita rotorell för $K = 1$, m.a.p α

Lösning:

0) TA FRAM G_{CL} FÖR ALLA α, K . ($\theta_{ref} \xrightarrow{TF} \theta$)

$$\theta(s) = \frac{1}{s} \dot{\theta}(s) \Rightarrow s\theta(s) = \dot{\theta}(s) \quad (1)$$

$$\dot{\theta}(s) = K \cdot \frac{k}{1+0,5s} (\theta_{ref}(s) - \theta(s) - \alpha \dot{\theta}(s)) \quad (2)$$

(1) : (2):

$$s\theta(s) = \frac{2K}{1+0,5s} (\theta_{ref}(s) - \theta(s) (1+\alpha s))$$

$$\theta(s) / s + \frac{2K}{1+0,5s} \cdot (1+\alpha s) = \frac{2K}{1+0,5s} \theta_{ref}$$

$$\Rightarrow \theta(s) = \underbrace{\frac{2K}{s(1+0,5s) + 2K(1+\alpha s)}}_{G_{CL}(s)} \theta_{ref}$$

a) $K \in [0, \infty[$, $\alpha = 0$

FÖLJ JETEN PÅ OCH!

1) $G_{OL} = \frac{2K}{s + 0,5s^2 + 2K}$

2) Polpolynom: $\underbrace{s + 0,5s^2}_{P(s)} + \underbrace{K \cdot 2}_{Q(s)} = 0$

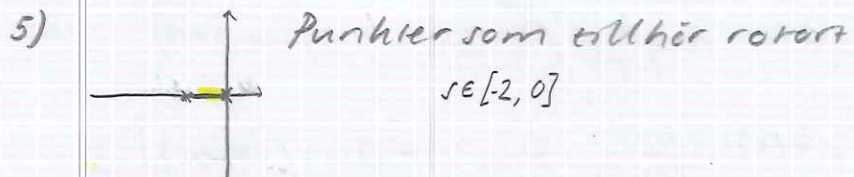
$P(s) = 0,5s^2 + s \Rightarrow n=2$
 $Q(s) = 2 \Rightarrow m=0$, $n \geq m$ ☺

3) Startpunkter:

$P(s) = 0 \Rightarrow s(1 + 0,5s) = 0 \Rightarrow s=0, s=-2$

4) Slutpunkter

$Q(s) = 0$, inga lösningar $\Rightarrow$ inga ändpunkter



6) Antal asymptoter: $n-m=2$

7) Skärningspunkt:

$SP = \frac{1}{n-m} (\sum \text{Startp.} - \sum \text{ändp.}) = \frac{1}{2} (0 + (-2)) = -1$

8) Riktningar på asymptot

$\phi = \frac{\pi}{n-m} + 2l \frac{\pi}{n-m}$, $l=0,1$

$\phi_0 = \frac{\pi}{2}$, $\phi_1 = \frac{3\pi}{2}$

9) Skärningspunkter med Im-axeln :

$P(i\omega) + KQ(i\omega) = 0$

$\Rightarrow 0,5(i\omega)^2 + i\omega + 2K = 0$

$(-0,5\omega^2 + 2K) + i\omega = 0$

Re-del = 0

OCH

Im-del = 0

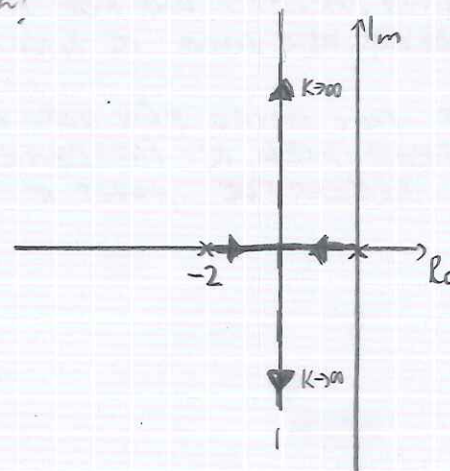
$-0,5\omega^2 + 2K = 0$

$\omega = 0$

$\omega = \pm \sqrt{4K} = \pm 2\sqrt{K}$

$\omega = 0$ är enda lösning, svarar mot $K=0$ (OK!)

10) Rita!



3.6

$$d) /K=1, \alpha \in [0, \infty[$$

$$1) G_{CL} = \frac{2}{s(1+0,5s)+2\alpha s+2}$$

2) Polpolynom:

$$\underbrace{0,5s^2+s+2}_{P(s)} + \underbrace{\alpha \cdot 2s}_{\text{"K" } Q(s)} = 0$$

$$\begin{aligned} P(s) &= 0,5s^2+s+2 \Rightarrow n=2 \\ Q(s) &= 2s \Rightarrow m=1 \end{aligned}$$

 $n > m$ ☺

3) Startpunkter:

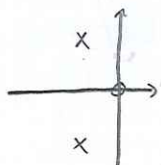
$$P(s)=0 \Rightarrow s^2+2s+4=0$$

$$s = -1 \pm \sqrt{1-4} = -1 \pm i\sqrt{3}$$

4) Ändpunkter

$$Q(s)=0 \Rightarrow 2s=0 \Rightarrow s=0$$

5) Punkter som tillhör rotort på Re-axeln



• ALLA punkter på neg. Re-axeln

/ nu är rotorten
m.g.p. α inte k6) Antal asymptoter $n-m=1$

$$7) \text{ "Skärningspunkt": } SP = \frac{1}{2 \cdot 1} \cdot (-1 + i\sqrt{3} + (-1) - i\sqrt{3} - 0) = -2$$

8) Asymptotens riktningar

$$\phi = \frac{\pi}{1} = \pi \quad \text{d.v.s. PÅ REELLA AXELN}$$

(d.v.s. asymptoten "skär" inte reella axeln)

9) Skärningspunkt med Im-axeln:

$$P(i\omega) + \alpha Q(i\omega) = 0$$

$$\Rightarrow 0,5(i\omega)^2 + i\omega + 2 + \alpha \cdot 2i\omega = 0$$

$$-0,5\omega^2 + 2 + i(\omega + \alpha \cdot 2\omega) = 0$$

$$\text{Re-del} = 0 \quad \text{OCH} \quad \text{Im-del} = 0$$

$$-0,5\omega^2 + 2 = 0$$

$$\omega = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

$$\omega + \alpha \cdot 2\omega = 0$$

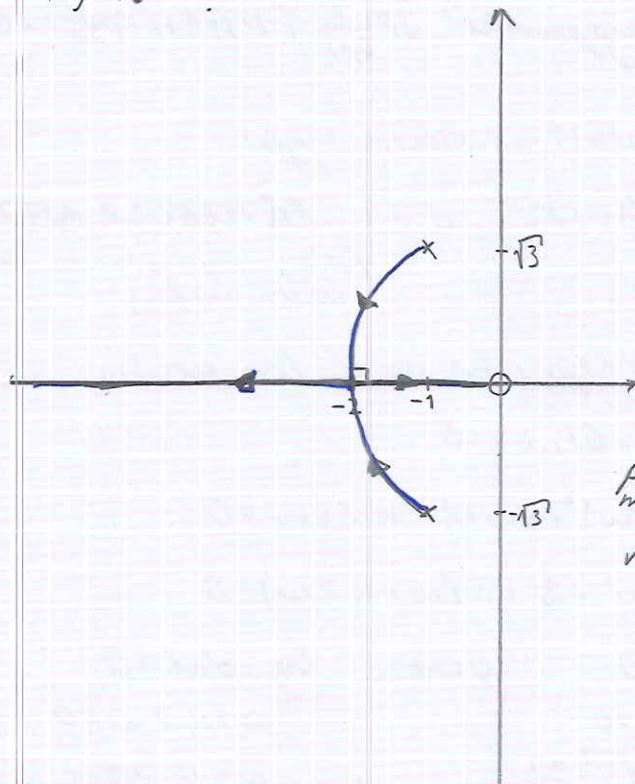
$$\omega = 0 \text{ eller } \alpha = -0,5$$

Ingen lösning!

 $\Rightarrow$ Ingen skärning med Im-axeln

3.6 d)

10) Rita!



polerna går
mot reella axeln
och inkommer
vinhelrätt!