# ÖVNING 5 2017

IDAG: Nyquistkriteriet

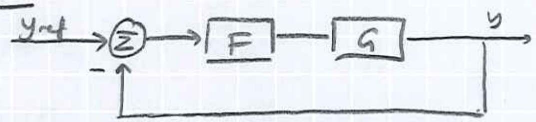
Svarar på:

STABILITETSFRÅGAN: ÄR DET SLUTNA SYSTEMET STABILT?

D.V.S. FINNS POLER I HHP?

HUR VI GÖR: ANALYSERA ÖPPNA SYSTEMET

VARFÖR:



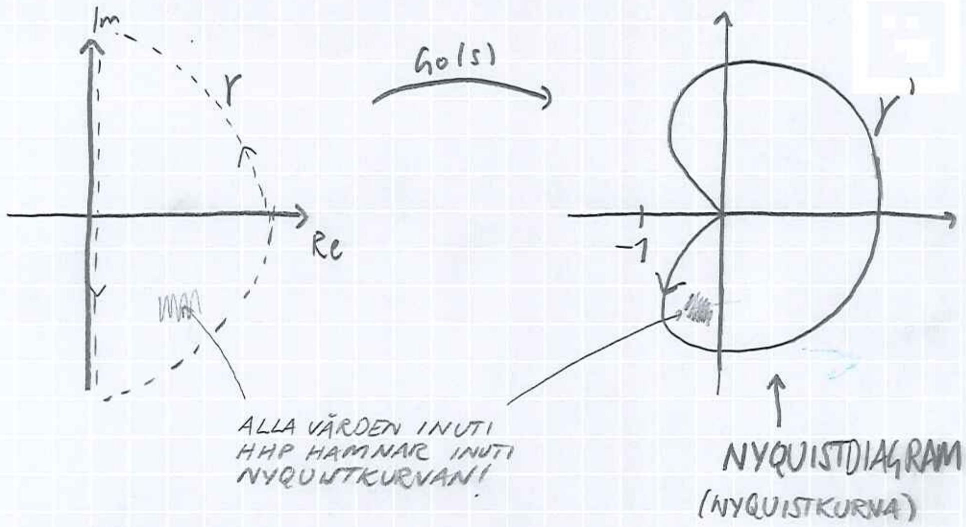

$G_o(s) = G(s)F(s)$ , $G_{CL}(s) = \dfrac{G_o(s)}{1+G_o(s)}$

→ POLER TILL $G_{CL}(s)$
⟷ DÄR $1+G_o(s)$ ÄR NOLL!

FRÅGAN BLIR: HAR $1+G_o(s)=0 \Leftrightarrow G_o(s)=-1$ NÅGRA LÖSNINGAR FÖR $s$ I HÖGER HALVPLAN?

METOD: AVBILDA (RANDEN AV) HHP VIA $G_o(s)$:






$G_o(s)=-1$ HAR INGA LÖSNINGAR OM −1 EJ OMSLUTS!

⇒ **OM −1 EJ OMSLUTS AV γ' ÄR SYSTEMET STABILT!**

= förenklade Nyquistkriteriet

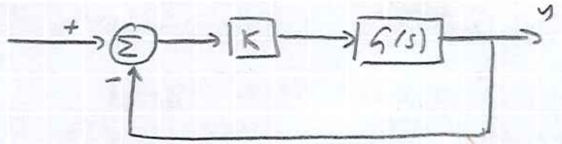
varför förenklade?
Förutsätter att $G_o(s)$ ej har poler i HHP! ⚠

Resultat 3.3. s.76

## 3.14 MÅL: Använda Nyquistkriteriet

UPPGIFT:

Systemen $G_i(s), \dots, G_{iv}(s)$ regleras med en P-regulator $F(s)=K$:




a) Är det slutna systemet stabilt för $K=1$ (se Nyquist-diagram!)

b) För vilka $K>0$ är det slutna systemet stabilt?

---

LÖSNING:

VI VET:
- $G_0(s) = G(s)\cdot K = \{K=1\} = G(s)$ (4 olika)
- $G_0(s)$: NYQUISTDIAGRAM (i)-(iv)
- $G_0(s)$: INGA POLER I HHP ⇒ P=0

⇒ KAN ANVÄNDA FÖRENKLADE NYQUIST

⇒ SLUTNA SYSTEMET STABILT OM KURVAN EJ OMSLUTER −1!

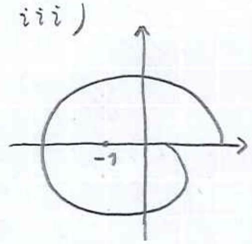
5

BETRAKTA KURVORNA

| | VARV RUNT −1 | STABILT? |
|---|---|---|
| i) | 0 | ✓ |
| ii) | 0 | ✓ |
| iii) | 2 åt samma håll | ✗ |
| iv) | 1 medsols, 1 motsols ⇒ totalt 0 | ✓ |

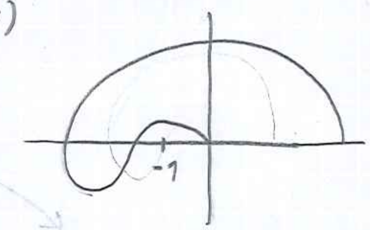
Vi kan också se skillnad på iii) och iv) genom att betrakta HALVA Nyquist-kurvan (alltid symmetrisk!)

iii)




Totala argumentet runt −1 är $2\pi$

iv)




Tot. arg. runt −1 $< 2\pi$

b) HUR PÅVERKAR K NYQUISTKURVAN.

SVAR: DEN SKALAS MED FAKTOR K!

VARFÖR: $\gamma' = G_0(s)\big|_{s\in\gamma} = K\cdot G(s)\big|_{s\in\gamma}$

$\Rightarrow |\gamma'| = |KG| = |K||G|$

> ÄNDRAS ARGUMENTEN (VINKLARNA)?

NEJ! $\arg(KG) = \underbrace{\arg K}_{=0} + \arg(G) = \arg(G)$

6

# 3.14 b)

i) "Kritisk punkt": 0,4
Om Nyquistkurvan skalas upp med K
är den punkten i 0,4 K.

⇒ VILLKOR: $K \cdot 0{,}4 < 1 \iff K < \frac{5}{2}$

ii) "Kritisk punkt" : 0, kan ej flyttas genom
skalning $(K \cdot 0 = 0)$

STABILT $\forall K > 0$

iii) "Kritisk punkt": 2. Skala ned K så
den punkten är innanför 1:

⇒ VILLKOR: $K \cdot 2 < 1 \iff K < \frac{1}{2}$

iv) Antingen: skala ned så hela kurvan
är till höger om −1:

VILLKOR 1: $K \cdot 4 < 1 \iff K < \frac{1}{4}$

annars, skala inte ned så "kritiska pkten"
i −2 hamnar t.h. om −1

VILLKOR 2: $K \cdot 2 > 1 \iff K > \frac{1}{2}$

(Vi kan skala upp hur mycket vi vill!)

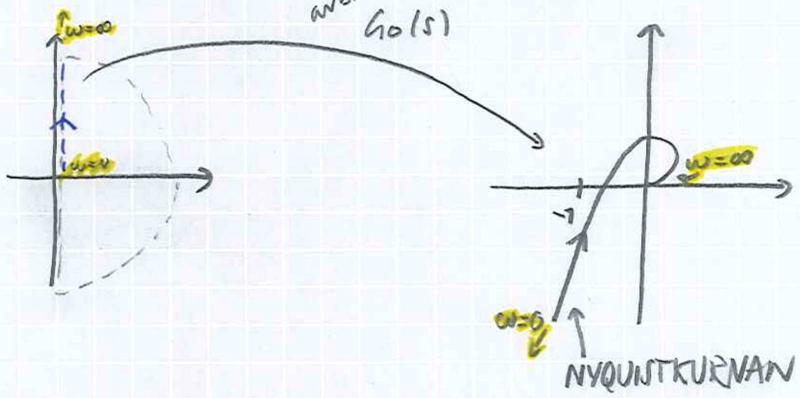
TEORI (före uppg. 3.16)

- NYQUISTKURVAN

- NYQUISTDIAGRAMMET SYMMETRISKT

- PUNKTERNA DÄR $s = j\omega$ SOM BESTÄMMER UTSEENDET

DÄRFÖR OFTA:

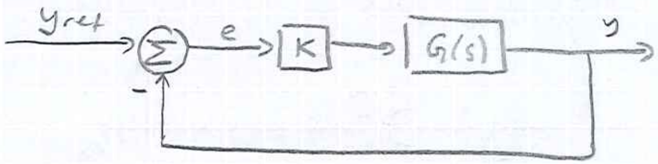



STABILT OM $-1$ LIGGER TILL VÄNSTER OM NYQUISTKURVAN ($\omega: 0 \rightarrow \infty$).

Bok s. 78!

## 3.16 MÅL: Analysera stabilitet m.h.j.a. Nyquistkurvan

Uppgift:




Givet: • $G(s)$ asymptotiskt stabilt
• Nyquistkurva med värden för vissa $\omega$

a) För vilka $K>0$ är slutna systemet stabilt?

b) Bestäm statiska felet $e$ om $y_{ref}$ är enhetssteg.

c) För vilka $K$ är systemet stabilt om regulatorn är $F(s)=\frac{K}{s}$ istället?

---

a) Stabilitet för slutna systemet
↳ Betrakta öppna systemets Nyquistkurva!

Här: $G_0(s) = K\cdot G(s)$

Vi vet: $G(s)$ asymptotiskt stabil

$\Rightarrow$ $\left.\begin{matrix} G(s) \\ G_0(s) \end{matrix}\right\}$ har inga poler i HHP

$\Rightarrow$ Kan använda förenklade Nyquistkriteriet (bok s. 78):



FÖRENKLADE NYQUISTKRIT.
Om $G_0$ inte har poler i HHP så är $G_c$ stabilt om $-1$ ligger t.v. om Nyquistkurvan!

Observation: Kurvan för $G(s)$ ($G_0(s)$ med $K=1$) omsluter $-1$! Ej stabilt!

Vi måste skala ned kurvan så att:

$$-1{,}5K = -\frac{3}{2}K > -1$$

$$\Leftrightarrow \boxed{K < \frac{2}{3}}$$

b) Statiska felet:

Använd SLUTVÄRDESSATSEN!

Förutsättning: $G_c$ stabilt $\overset{(a)}{\Leftrightarrow} K<\frac{2}{3}$.

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s)$$

$$E(s) = Y_{ref}(s) - Y(s)$$

$$Y(s) = K\,G(s)\cdot E(s)$$

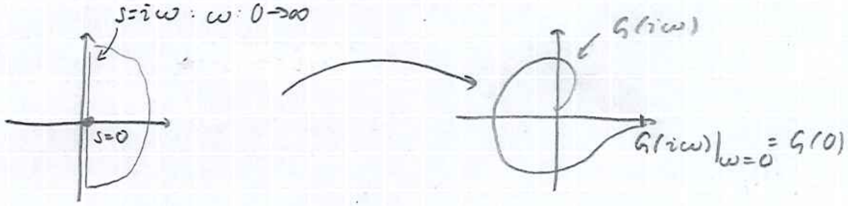
$$\Rightarrow E = Y_{ref} - KGE$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{1+KG}Y_{ref}$$

$$\Rightarrow \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+KG(s)}\cdot\underbrace{\frac{1}{s}}_{\text{enhetssteg}} = \frac{1}{1+KG(0)}$$

3.16. b) forts)

Läs av $G(0)$ i Nyquistdiagrammet:



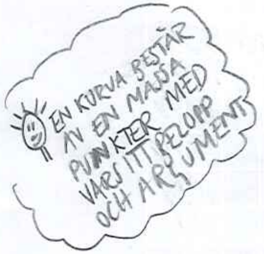

$\Rightarrow G(0)=2$

$\Rightarrow$ Statiska felet (steady state error)

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \frac{1}{1+K\cdot 2} \quad \text{för } K < \frac{2}{3}$$

c) Hur påverkas Nyquistkurvan av integrator?

Nu är $G_0(s) = \frac{K}{s} G(s)$ istället




• Argumentet:

$$\arg(G_0(i\omega)) = \arg\left(\frac{K}{i\omega} G(i\omega)\right) = \underbrace{\arg K}_{0} - \underbrace{\arg(i\omega)}_{\frac{\pi}{2}} + \arg(G(i\omega)) = \arg G(i\omega) - \frac{\pi}{2}$$

• Beloppet:

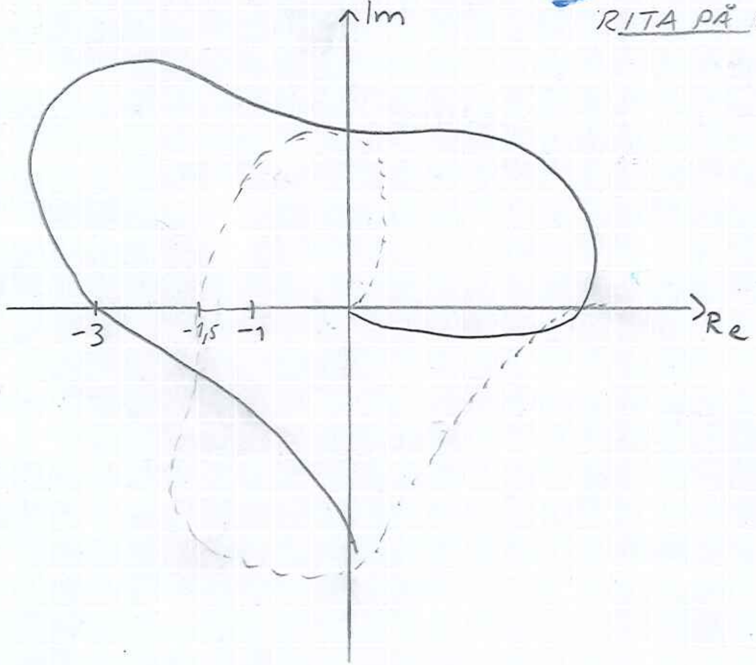
$$|G_0(i\omega)| = \left|\frac{K}{i\omega} G(i\omega)\right| = \left\{\arg\frac{K}{i\omega} = -\frac{\pi}{2}\right\} = \left|\frac{K}{i\omega}\right| |G(i\omega)|$$

$$= \frac{K}{\omega} |G(i\omega)|$$



> Vi vrider kurvan $-90°$ och skalar om den med $\frac{K}{\omega}$ (beror på $\omega$!)

RITA PÅ OH:




Gammal kritisk punkt: $-1{,}5$ vid $\omega=10$

Ny — " — : $-3\cdot\frac{K}{\omega}$ vid $\omega=2$

Hur kan vi välja $K$ så denna punkt hamnar t.h. om $-1$?

$$|G_0(i\omega)|_{\omega=2} < 1 \Rightarrow \frac{K}{2}|G(2i)| = \frac{K}{2}\cdot 3 < 1$$

$$\Rightarrow K < \frac{2}{3}$$

(SLUMP)